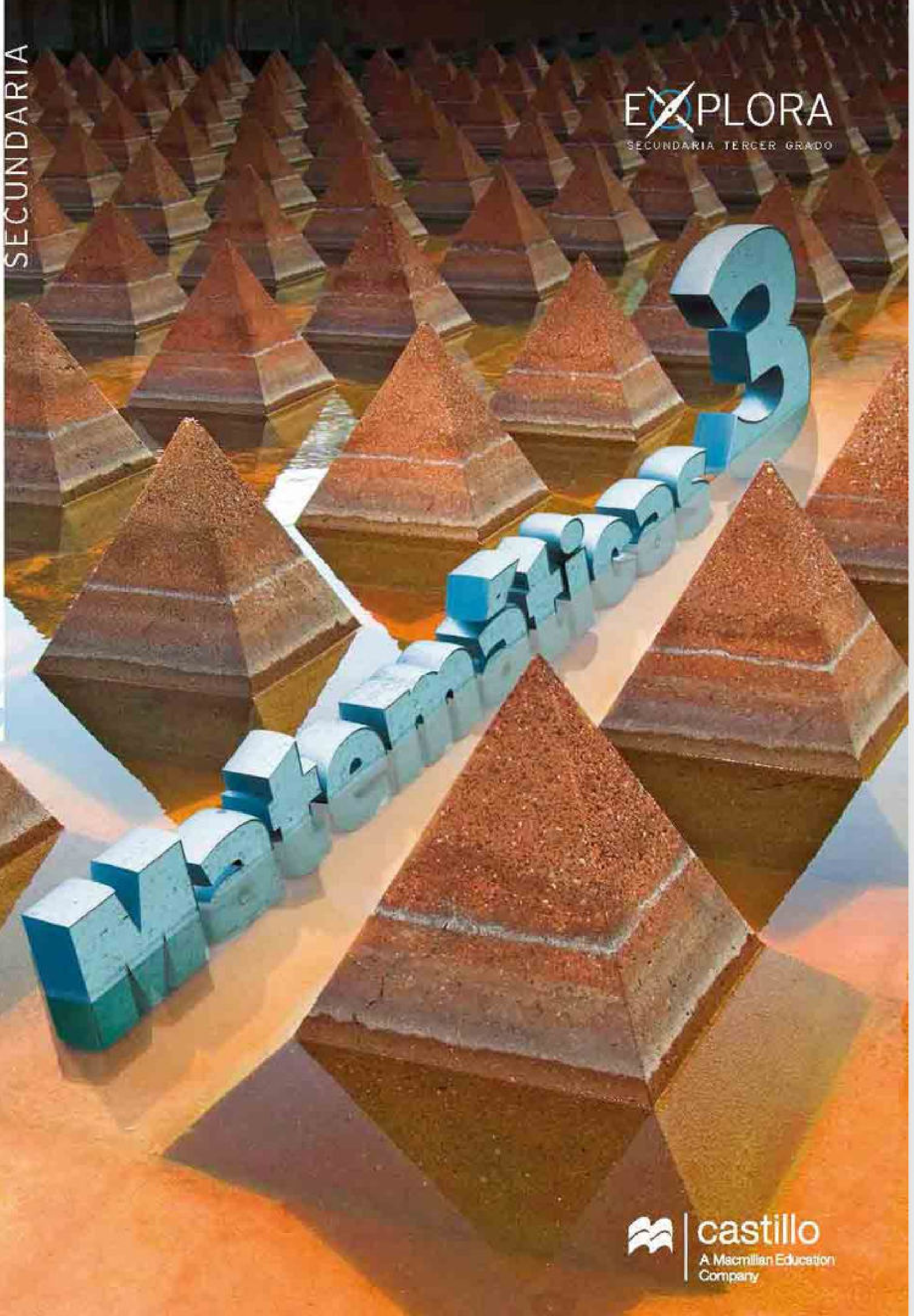
Matemáticas 3

Carlos Baltazar Vicencio, Eric Ruiz Flores González
y Luis Fernando Ojeda Ánimas

SECUNDARIA



Dirección editorial Cristina Arasa • **Subdirección editorial** Tania Carreño King • **Subdirección de diseño** Renato Aranda • **Gerencia de secundaria** Aurora Saavedra Solá • **Coordinación editorial** Javier Jiménez Alba • **Edición** José Antonio Gaytán, Ricardo Medel Esquivel y Carlos Martínez Lara • **Colaboración** Estela Navarro, Elvia Perrusquía Máximo, Anne Alberro, Marco Antonio Alcántara, Ma. Teresa Muñoz y Rocio Serrano • **Revisión técnica** Elvia Perrusquía Máximo • **Corrección de estilo** María del Carmen Solano del Moral • **Diseño de la serie** Renato Aranda y Gustavo Hernández • **Concepto portada** Renato Aranda y Gustavo Hernández • **Coordinación de diseño editorial** Gustavo Hernández • **Coordinación de Operaciones** Gabriela Rodríguez Cruz • **Coordinación de imagen** Ma. Teresa Leyva Nava • **Supervisión de diseño** Carlos Madero Soto • **Investigación iconográfica** Manuel Gerardo Platas Gutiérrez • **Diagramación** Elizabeth Martínez Suástegui • **Ilustración** Fernando David Ortiz Prado, Eloy Padilla Puga, María del Carmen Gutiérrez Cornejo, Víctor Duarte Alaniz • **Gráficos** María del Carmen Gutiérrez Cornejo y Carlos Zariñana Pulido • **Fotografía** Gerardo González López y banco de imágenes de Ediciones Castillo • **Imagen portada** Fuente de Vicente Rojo en la Plaza Juárez, México, D. F., 2012 • **Fotografía** Ernesto Calderón Cervantes • **Digitalización y retoque** Juan Ortega Corona • **Gerencia de producción** Alma Orozco • **Coordinación de producción** Ulyses Calvillo

Primera edición: marzo de 2014
Cuarta reimpresión: abril de 2018

Matemáticas 3
Explora

Insurgentes Sur 1886, Florida,
Álvaro Obregón, C. P. 01030,
Ciudad de México, México.
Tel.: (55) 5128-1350
Fax: (55) 5128-1350 ext. 2899

Ediciones Castillo forma parte del Grupo Macmillan

www.edicionescastillo.com
infocastillo@grupomacmillan.com
Lada sin costo: 01 800 536-1777

Miembro de la Cámara Nacional de la Industria
Editorial Mexicana, Registro núm. 3304

ISBN de la serie: 978-607-463-581-2
ISBN: 978-607-463-967-4

Impreso en México/*Printed in Mexico*

Prólogo

Esta obra está elaborada pensando en que, sin dejar de lado al profesor, los alumnos se conviertan en protagonistas del acto educativo. Se centra en el logro de los aprendizajes y favorece el desarrollo de las competencias matemáticas.

Los estudiantes podrán resolver problemas y situaciones utilizando sus propios procedimientos. Por medio de procedimientos expertos o ya establecidos, analizando las ventajas de cada uno y por medio de las secuencias didácticas, que constituyen la parte medular del texto, expresarán, interpretarán y representarán la información matemática contenida en una situación o fenómeno. La obra está dirigida, también, al desarrollo del significado y uso de los números y de las operaciones, pues permite que los estudiantes sigan procedimientos, técnicas y formas de representación con eficiencia, y que los adapten y pongan a prueba en diferentes problemas.

El libro está conformado por secuencias didácticas basadas en situaciones problemáticas cotidianas. Se fomenta la actitud colaborativa entre los alumnos por medio de trabajo en equipo, y se fomenta que los alumnos analicen y socialicen sus procedimientos y resultados. Se promueve también el uso de materiales concretos así como de las tecnologías de la información.

Cada una de las secuencias comienza con una situación problemática que tiene la finalidad de despertar el interés y hacer reflexionar a los alumnos sobre el contenido de la secuencia.

El desarrollo de los contenidos está basado en situaciones problemáticas que presentan un avance gradual en la complejidad. Se promueve la construcción de fórmulas, reglas y procedimientos por medio de procesos que van de lo informal a lo convencional. Las secuencias incluyen una o más veces la sección de formalización llamada *Integración*, que guía a los alumnos a explicar y justificar sus procedimientos y soluciones.

Al final de cada secuencia didáctica se retoma la situación problemática inicial, pero con alguna variante para plantear nuevos retos a los estudiantes y así propiciar que utilicen los aprendizajes adquiridos a lo largo de la secuencia, es decir, haciendo uso de procedimientos expertos.

Presentación para el alumno

En matemáticas no hay un solo método para resolver problemas, sino que se requiere deliberación, análisis, razonamiento y lógica para llegar a la solución.

Uno de los propósitos de este libro es lograr que desarrolles tu capacidad de resolver problemas y situaciones matemáticas aplicando tus propias estrategias. Con el apoyo de este libro, tu profesor te ayudará a conseguirlo.

Tu primer desafío será conocer el libro y familiarizarse con los elementos que lo conforman.

Este libro está dividido en cinco bloques compuestos por varias secuencias de aprendizaje. En cada secuencia aprenderás un tema del contenido de matemáticas que estudiarán a partir de situaciones problemáticas.

En cada secuencia encontrarás las siguientes secciones:

Inicio a partir de lo que sé

El inicio de la secuencia está formado por una situación inicial y varias preguntas que deberás tratar de resolver usando tus conocimientos previos. Para ello puedes probar diversas estrategias, como la estimación, el cálculo numérico, etcétera.

Resuelvo y aprendo

Esta sección contiene el desarrollo de la secuencia y está planeada para que desarrolles el trabajo colaborativo, se basa en situaciones problemáticas y en preguntas que resolverás proponiendo, al resto del equipo, los procedimientos o soluciones que te parezcan más adecuadas, además construirás los conceptos y procedimientos matemáticos propios de este nivel escolar.

Integración

Es un espacio de formalización donde explicarás y mostrarás al resto del grupo tus procedimientos y resultados, siempre con la validación de tu profesor.

Consolido mis aprendizajes

Esta sección constituye el cierre de la secuencia. Está formada por dos partes: en la primera, se retoma la situación problemática inicial o una variante que deberás resolver por medio de las habilidades y procedimientos expertos adquiridos a lo largo de la secuencia, y en la segunda resolverás situaciones de manera autónoma.

Presentación para el maestro

Mediante el estudio de las matemáticas en la educación básica se busca, entre otras cosas, que los jóvenes desarrollen una forma de pensamiento que les permita desarrollar técnicas eficientes para reconocer, plantear y resolver problemas. Para ello, la escuela debe propiciar un ambiente en que los alumnos formulen y validen sus conjeturas, se planteen preguntas, utilicen procedimientos propios y desarrollen las habilidades y conocimientos matemáticos, a la vez que comuniquen, analicen e interpreten ideas y procedimientos de resolución. Esto puede lograrse mediante secuencias problemáticas que despierten el interés de los alumnos y los inviten a reflexionar, a encontrar diferentes maneras de resolver los problemas y a formular argumentos que validen sus resultados.

Esta obra está formada con el objetivo de brindarle apoyo para trabajar con secuencias didácticas, así como para despertar y consolidar el interés de sus alumnos en la asignatura. Incluye situaciones problemáticas basadas en contextos factibles, además le ofrece recursos que les permitirán a sus alumnos construir el conocimiento matemático de una forma práctica, clara y estimulante, y la posibilidad de que analicen y socialicen sus procedimientos y resultados.

El libro *Matemáticas 3* está elaborado por personas formadas en los sectores educativo y matemático, y está planeado como una herramienta de apoyo para los alumnos, el profesor y los padres de familia.

En el diseño de las secuencias didácticas se han considerado las cuatro competencias matemáticas:

- Resolver problemas de manera autónoma.
- Comunicar información matemática.
- Validar procedimientos y resultados.
- Manejar técnicas eficientemente.

Estructura del libro

Las secuencias didácticas están formadas por cuatro secciones: *Inicio a partir de lo que sé*, *Resuelvo y aprendo*, *Integración* y *Consolido mis aprendizajes*.

En la sección *Inicio a partir de lo que sé* se plantea el inicio de la secuencia didáctica con una situación problemática y algunas preguntas que tienen la finalidad de despertar el interés y hacer reflexionar a los alumnos sobre el contenido didáctico de la secuencia. Los alumnos deben usar sus conocimientos previos para resolverla mediante el uso de diversos procedimientos (estimación, cálculo numérico, etcétera). El desafío consiste en que reconstruyan lo que saben, ya sea para cambiarlo, incrementarlo, rechazarlo o para volver a aplicarlo en un problema nuevo. Esta sección está planeada para que los estudiantes trabajen en equipo, bajo la premisa de que la recuperación de conocimientos se logra a través de la comunicación.

El desarrollo de la secuencia se aborda en la sección *Resuelvo y aprendo*, la cual está formada por situaciones problemáticas que resuelven los propios alumnos. El tratamiento de los contenidos siempre parte de conocimientos previos y presenta un avance gradual en la complejidad que permite a los alumnos establecer conexiones entre lo que ya saben y lo que aprenderán. La estructuración de fórmulas, reglas y procedimientos abarca procesos que van de lo informal a lo convencional. Esta sección está planeada para que los estudiantes trabajen en grupo y obtengan procedimientos y soluciones por medio del debate y la socialización.

Cada una de las secuencias incluye la sección *Integración*, que es un espacio de formalización donde los alumnos argumentarán frente al grupo los procedimientos y soluciones que construyeron desarrollando sus capacidades de explicación y justificación formal.

En la sección *Consolido mis aprendizajes* se presenta el cierre de la secuencia didáctica, y está formada por dos partes. En la primera se retoma la situación problemática inicial o una variante para plantear nuevos retos y así propiciar el uso de procedimientos expertos, es decir, los conocimientos adquiridos en la secuencia. En la segunda parte se propicia la capacidad para el trabajo autónomo.

Para la elaboración del Glosario se consultaron reconocidos diccionarios, algunos de ellos de uso escolar. Los términos en esta sección están escritos en un leguaje coloquial, pero sin descuidar la precisión matemática.

Las imágenes presentadas en las Entradas de bloque están relacionadas con el contenido temático de cada bloque y forman parte integral del texto.

Este libro incluye el anexo Conceptos clave ordenados por ejes y temas, donde los alumnos podrán expresar con sus propias palabras conceptos y procedimientos clave que ellos mismos formularon en la sección *Integración*.

Cómo trabajar

En las actividades en que se sugiere trabajar en equipo, se pide generalmente a los alumnos que al terminar comparen y comenten sus resultados y procedimientos con otros equipos o con todo el grupo, con la finalidad de que analicen, por ejemplo, si alguno de los procedimientos les parece más práctico o más ingenioso que los demás. Este tipo de peticiones ocasionan que en muchas de las secuencias se trabaje en equipo solamente al principio y terminen convertidas en actividades grupales.

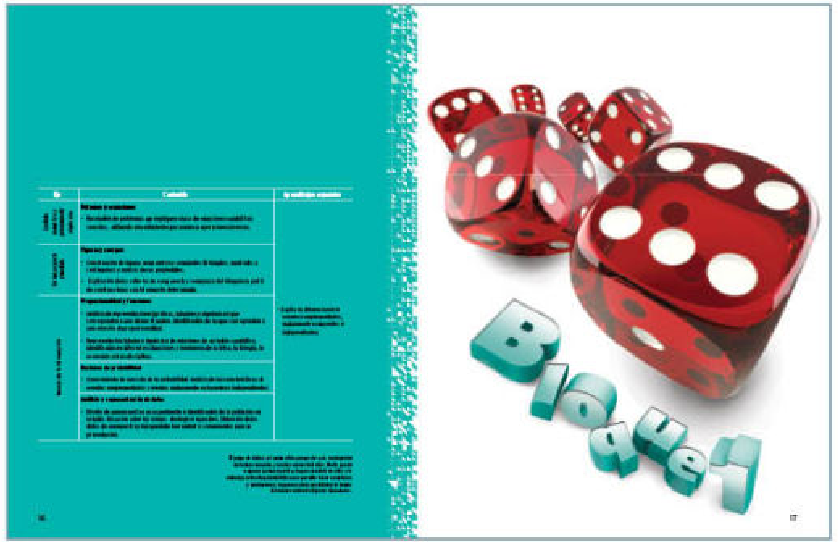
Como lo que se pretende es que sean los propios alumnos quienes formulen y validen conjeturas, se sugiere intervenir lo menos posible en sus discusiones. No se trata de que usted les explique cómo hacer las cosas; la idea es que ellos encuentren cómo hacerlas, resolviendo los problemas planteados mediante estrategias propias y con base en sus propios conocimientos.

Índice

Estructura de tu libro

Entrada de bloque

Tu libro está dividido en cinco bloques. Al inicio de cada uno encontrarás una página doble en la que se proporcionan las competencias que se favorecen, los aprendizajes esperados, los ejes y los contenidos correspondientes a dicho bloque.

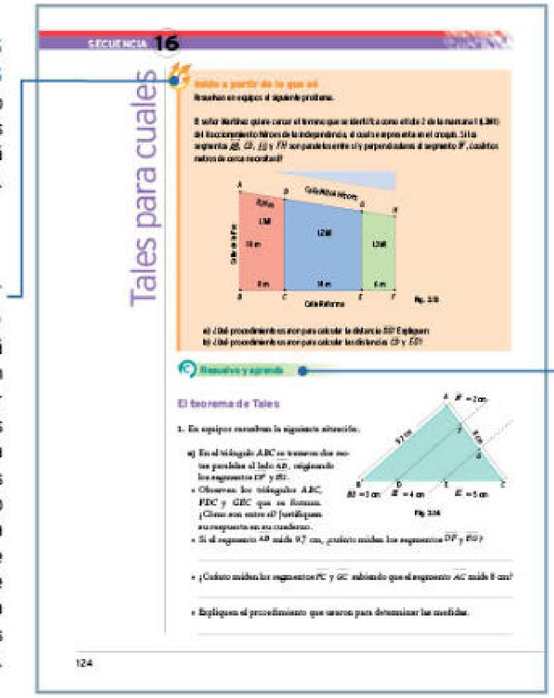


Secuencias didácticas

Cada bloque está conformado por un conjunto de secuencias didácticas en las que se trabajará un determinado contenido.

Inicio a partir de lo que sé

El inicio de la secuencia está constituido por una situación problemática inicial diseñada para ser resuelta a partir de tus conocimientos previos. Te sugerimos que para su resolución pruebes diversas estrategias (estimación, cálculo numérico, etcétera). En el cierre de la secuencia se presentará una variante de dicha situación problemática que se espera puedas resolver, pero ahora con los conocimientos que hayas adquirido a lo largo de la secuencia.

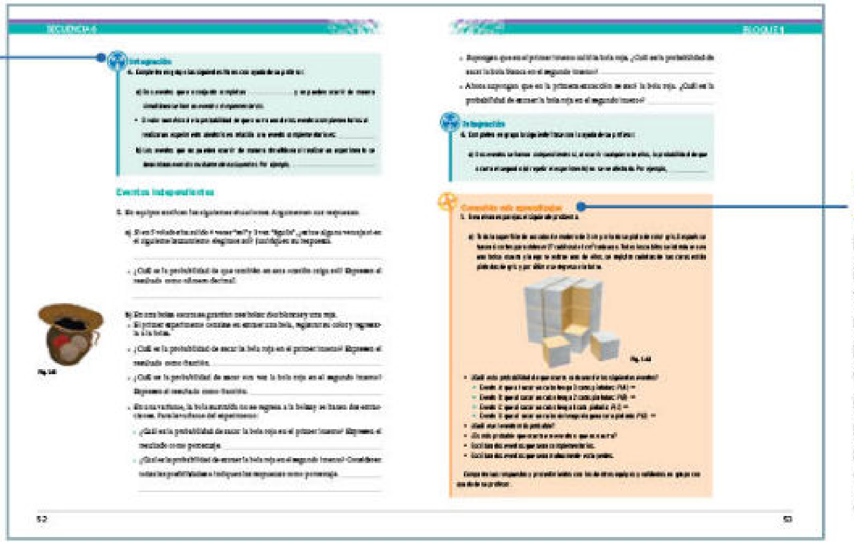


Resuelvo y aprendo

Esta sección está constituida por situaciones problemáticas que favorecen los procesos de construcción del conocimiento y fomentan la reflexión y el análisis. Te sugerimos que para la resolución de las situaciones problemáticas pruebes diversas estrategias.

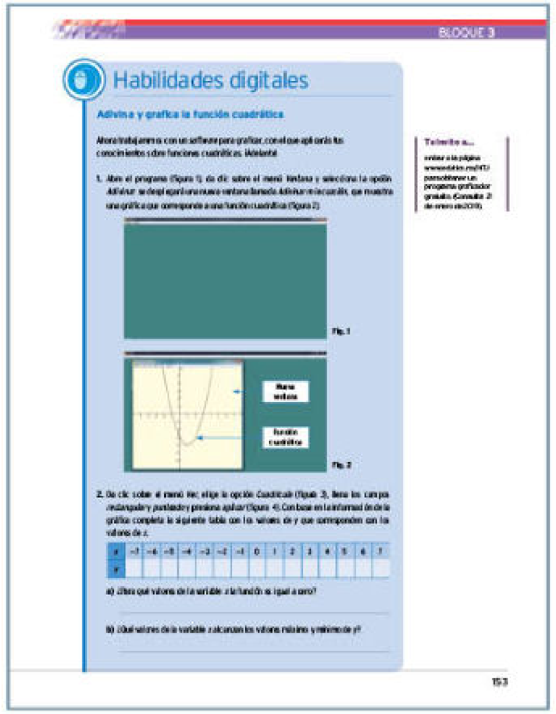
Integración

Indica el momento en el que tú y tus compañeros deben aportar sus conclusiones más importantes. Siempre, por supuesto, con la ayuda de su profesor.



Consolido mis aprendizajes

Esta sección retoma la situación problemática inicial o alguna variante. La finalidad es que puedas notar las ventajas de resolver problemas con procedimientos expertos. Posteriormente se presenta un conjunto de situaciones problemáticas cuyo objetivo es perfeccionar tus procedimientos y lograr que trabajes de manera autónoma.

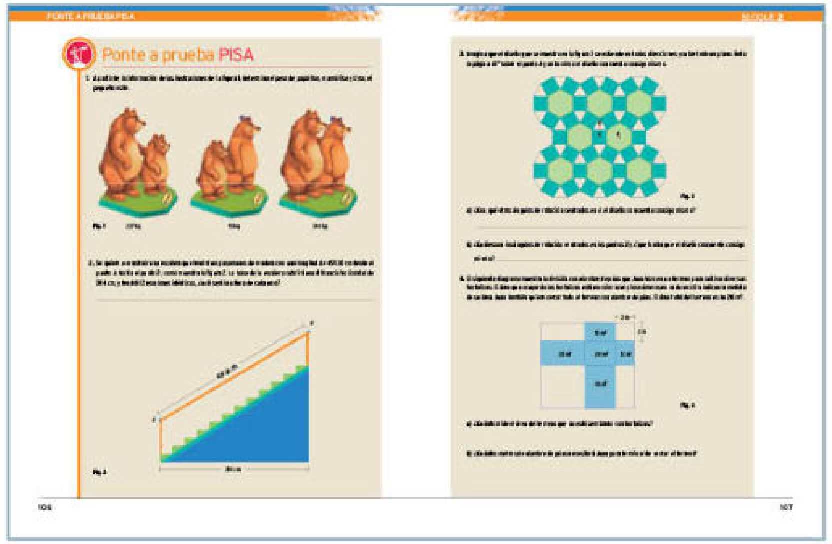


Habilidades digitales

Aquí tendrás la oportunidad de reforzar algunos de los temas estudiados y explorarlos mediante programas de computación. Las herramientas tecnológicas son un gran apoyo educativo, ¡descúbrelo!

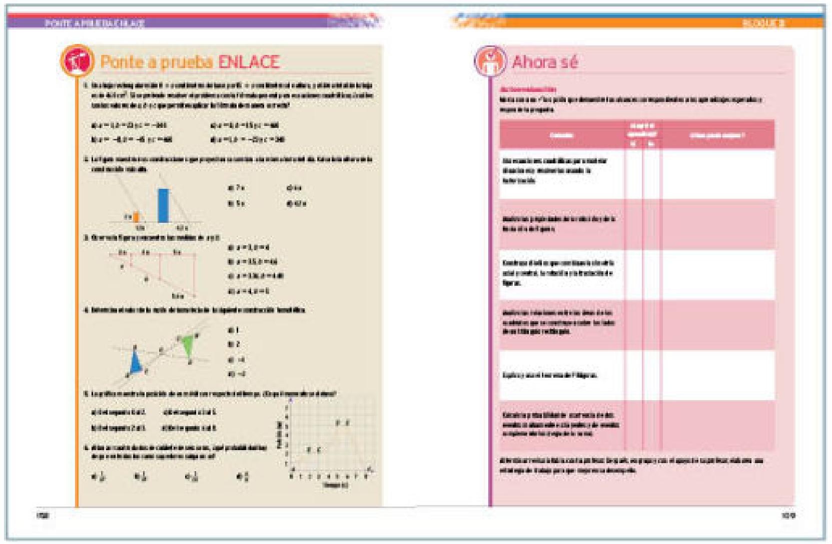
Ponte a prueba PISA

Estas evaluaciones estarán constituidas por reactivos tipo PISA (siglas en inglés del Programa para la Evaluación Internacional de los Estudiantes) con los que pondrás a prueba tus competencias matemáticas.



Ponte a prueba ENLACE

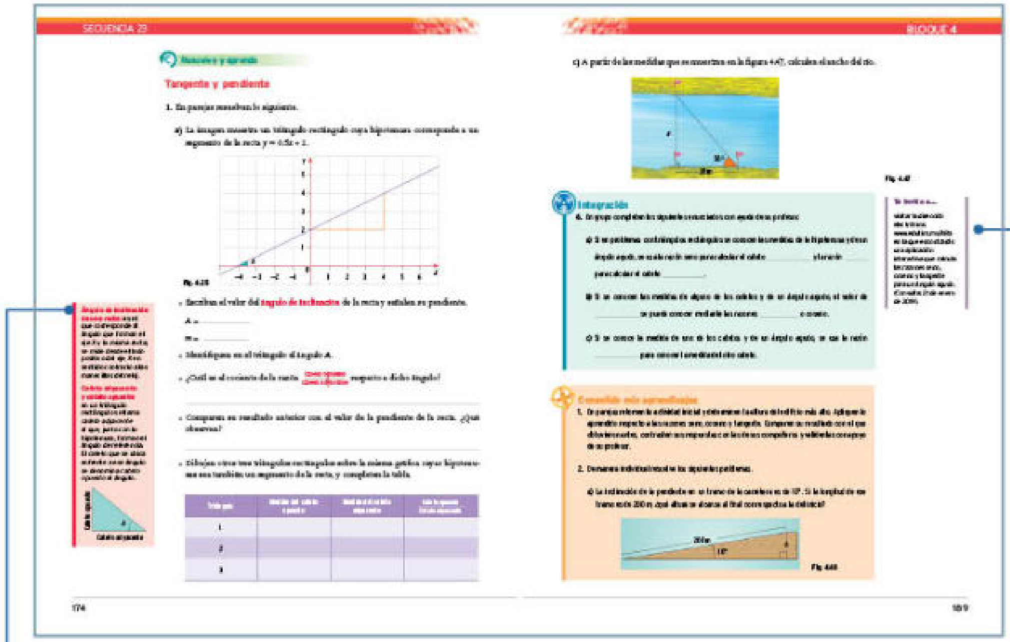
Estas evaluaciones estarán constituidas por reactivos tipo ENLACE (Evaluación Nacional del Logro Académico en Centros Escolares) con los que pondrás a prueba los conocimientos adquiridos a lo largo de cada bloque.



Ahora sé

También al final de los bloques se te pedirá responder algunas preguntas cuya finalidad es que realices una valoración cualitativa de tu desempeño durante el bloque.

Secciones complementarias



Glosario

Es una sección en la que se definen o explican términos matemáticos usados en la secuencia.

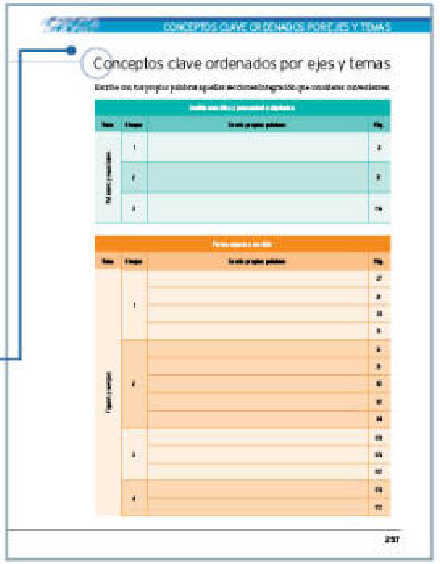
Notación

Es una sección en la que se explica el significado de diversos símbolos y notaciones empleados en matemáticas.

Anexo

Conceptos clave ordenados por ejes y temas

En este anexo podrán expresar con sus propias palabras conceptos o procedimientos clave formulados en la sección Integración.



Te invito a...

Proponemos trabajar con dos tipos de TIC (Tecnologías de la información y la comunicación). La primera corresponde con las Habilidades digitales, que se encuentran al final de cada bloque y están relacionadas con algún tema tratado. En la segunda te recomendamos visitar algunas páginas de internet relacionadas con el contenido que se esté abordando.

Dosificación

Bloque 1

Semana	Clases sugeridas	Páginas	Contenido
1	4	18-23	Resolución de problemas que impliquen el uso de ecuaciones cuadráticas sencillas, utilizando procedimientos personales u operaciones inversas.
2	4	24-29	Construcción de figuras congruentes o semejantes (triángulos, cuadrados y rectángulos) y análisis de sus propiedades.
3	4	30-35	Explicitación de los criterios de congruencia y semejanza de triángulos a partir de construcciones con información determinada.
4	4	36-41	Análisis de representaciones (gráficas, tabulares y algebraicas) que corresponden a una misma situación. Identificación de las que corresponden a una relación de proporcionalidad.
5	4	42-47	Representación tabular y algebraica de relaciones de variación cuadrática, identificadas en diferentes situaciones y fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas.
6	4	48-53	Conocimiento de la escala de la probabilidad. Análisis de las características de eventos complementarios y eventos mutuamente excluyentes e independientes.
7	4	54-58	Diseño de una encuesta o un experimento e identificación de la población en estudio. Discusión sobre las formas de elegir el muestreo. Obtención de datos de una muestra y búsqueda de herramientas convenientes para su presentación.
8	4	59-65	Habilidades digitales, Ponte a prueba PISA, Ponte a prueba ENLACE, Ahora sé.

Bloque 2

Semana	Clases sugeridas	Páginas	Contenido
9	5	68-73	Uso de ecuaciones cuadráticas para modelar situaciones y resolverlas usando la factorización.
10	5	74-79	Análisis de las propiedades de la rotación y de la traslación de figuras.
11	5	80-85	Construcción de diseños que combinan la simetría axial y central, la rotación y la traslación de figuras.
12	5	86-91	Análisis de las relaciones entre las áreas de los cuadrados que se construyen sobre los lados de un triángulo rectángulo.
13	5	92-97	Explicitación y uso del teorema de Pitágoras.
14	5	98-102	Cálculo de la probabilidad de ocurrencia de dos eventos mutuamente excluyentes y de eventos complementarios (regla de la suma).
15	5	103-109	Habilidades digitales, Ponte a prueba PISA, Ponte a prueba ENLACE, Ahora sé.

Bloque 3

Semana	Clases sugeridas	Páginas	Contenido
16	5	112-117	Resolución de problemas que implican el uso de ecuaciones cuadráticas. Aplicación de la fórmula general para resolver dichas ecuaciones.
17	5	118-123	Aplicación de los criterios de congruencia y semejanza de triángulos en la resolución de problemas.
18	5	124-129	Resolución de problemas geométricos mediante el teorema de Tales.
19	5	130-135	Aplicación de la semejanza en la construcción de figuras homotéticas.
20	5	136-141	Lectura y construcción de gráficas de funciones cuadráticas para modelar diversas situaciones o fenómenos.
21	5	142-147	Lectura y construcción de gráficas formadas por secciones rectas y curvas que modelan situaciones de movimiento, llenado de recipientes, etcétera.
22	5	148-152	Cálculo de la probabilidad de ocurrencia de dos eventos independientes (regla del producto).
23	5	153-159	Habilidades digitales, Ponte a prueba PISA, Ponte a prueba ENLACE, Ahora sé.

Bloque 4

Semana	Clases sugeridas	Páginas	Contenido
24	5	162-166	Obtención de una expresión general cuadrática para definir el enésimo término de una sucesión.
25	5	167-172	Análisis de las características de los cuerpos que se generan al girar sobre un eje, un triángulo rectángulo, un semicírculo y un rectángulo. Construcción de desarrollos planos de conos y cilindros rectos.
26	5	173-178	Análisis de las relaciones entre el valor de la pendiente de una recta, el valor del ángulo que se forma con la abscisa y el cociente del cateto opuesto sobre el cateto adyacente.
27	5	179-184	Análisis de las relaciones entre los ángulos agudos y los cocientes entre los lados de un triángulo rectángulo.
28	5	185-190	Explicitación y uso de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente.
29	5	191-196	Cálculo y análisis de la razón de cambio de un proceso o fenómeno que se modela con una función lineal. Identificación de la relación entre dicha razón y la inclinación o pendiente de la recta que la representa.
30	5	197-202	Medición de la dispersión de un conjunto de datos mediante el promedio de las distancias de cada dato a la media (desviación media). Análisis de las diferencias de la "desviación media" con el "rango" como medidas de la dispersión.
31	5	203-209	Habilidades digitales, Ponte a prueba PISA, Ponte a prueba ENLACE, Ahora sé.

Bloque 5

Semana	Clases sugeridas	Páginas	Contenido
32	5	212-217	Resolución de problemas que implican el uso de ecuaciones lineales, cuadráticas o sistemas de ecuaciones. Formulación de problemas a partir de una ecuación dada.
33	5	218-224	Análisis de las secciones que se obtienen al realizar cortes a un cilindro o a un cono recto. Cálculo de las medidas de los radios de los círculos que se obtienen al hacer cortes paralelos en un cono recto.
34	5	225-230	Construcción de las fórmulas para calcular el volumen de cilindros y conos, tomando como referencia las fórmulas de prismas y pirámides.
35	5	231-236	Estimación y cálculo del volumen de cilindros y conos o de cualquiera de las variables implicadas en las fórmulas.
36	5	237-243	Análisis de situaciones problemáticas asociadas a fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas, en las que existe variación lineal o cuadrática entre dos conjuntos de cantidades.
37	5	244-249	Análisis de las condiciones necesarias para que un juego de azar sea justo, con base en la noción de resultados equiprobables y no equiprobables.
38	5	250-256	Habilidades digitales, Ponte a prueba PISA, Ponte a prueba ENLACE, Ahora sé.

Eje	Contenido	Aprendizajes esperados
Sentido numérico y pensamiento algebraico	**Patrones y ecuaciones** • Resolución de problemas que impliquen el uso de ecuaciones cuadráticas sencillas, utilizando procedimientos personales u operaciones inversas.	
Forma, espacio y medida	**Figuras y cuerpos** • Construcción de figuras congruentes o semejantes (triángulos, cuadrados y rectángulos) y análisis de sus propiedades. • Explicación de los criterios de congruencia y semejanza de triángulos a partir de construcciones con información determinada.	
Manejo de la información	**Proporcionalidad y funciones** • Análisis de representaciones (gráficas, tabulares y algebraicas) que corresponden a una misma situación. Identificación de las que corresponden a una relación de proporcionalidad. • Representación tabular y algebraica de relaciones de variación cuadrática, identificadas en diferentes situaciones y fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas.	• Explica la diferencia entre eventos complementarios, mutuamente excluyentes e independientes.
	Nociones de probabilidad • Conocimiento de la escala de la probabilidad. Análisis de las características de eventos complementarios y eventos mutuamente excluyentes e independientes.	
	Análisis y representación de datos • Diseño de una encuesta o un experimento e identificación de la población en estudio. Discusión sobre las formas de elegir el muestreo. Obtención de los datos de una muestra y búsqueda de herramientas convenientes para su presentación.	

El juego de dados, así como otros juegos de azar, no depende de hechos causales, sino de sucesos fortuitos. Nadie puede asegurar a ciencia cierta, lo que sucederá en ellos; sin embargo, la teoría probabilística nos permite hacer conjeturas y predicciones, lo que nos da la posibilidad de tomar decisiones ante este tipo de situaciones.

La raíz del problema

Inicio a partir de lo que sé

En parejas resuelvan lo siguiente.

Un grupo de niños exploradores quieren elaborar banderines para hacer señalamientos. Para ello utilizarán cuadrados de tela de colores rojo y blanco como se muestra en la figura.

a) Si el área del banderín es de 225 cm^2, ¿cuánto mide el lado de cada retazo de tela?

b) Comparen sus resultados y procedimientos con otras parejas. Verifiquen que sean correctos y corríjanlos si es necesario.

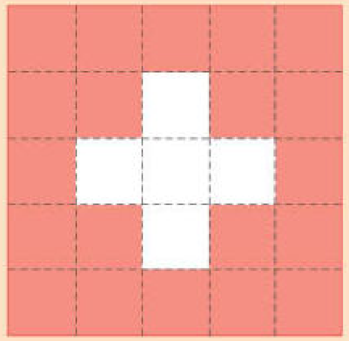


Fig. 1.1

Resuelvo y aprendo

Por tus propios medios

1. En parejas resuelvan el siguiente problema.

a) La figura 1.2 muestra el área del hueco circular de un pozo. ¿Cuál es su radio?

Fig. 1.2

- Describan el procedimiento que usaron para resolver el problema.
- Escriban una ecuación que represente la situación anterior en términos de la medida del radio de la abertura del pozo y su área.
- ¿Cuáles son las diferencias entre la ecuación que propusieron y la fórmula para encontrar el área de un círculo?

Comparen su procedimiento con los de otras parejas. Verifiquen su resultado y corríjanlo si es necesario.

2. En equipos resuelvan el siguiente problema.

a) Calculen las dimensiones de un rectángulo cuya base mide 2 metros más que su ancho y su área es de 35 metros cuadrados.

- Describan el procedimiento que utilizaron.
- Especifiquen las incógnitas del problema y represéntelas con las literales que ustedes elijan.
- Según el planteamiento del problema, una de las dimensiones del rectángulo depende de la otra. Escriban ambas dimensiones a partir de una sola incógnita.
- Anoten una expresión algebraica que represente la situación a partir de su respuesta anterior.
- Propongan una metodología para resolver la expresión algebraica anterior y pónganla en práctica. Anoten el valor de la incógnita y verifiquen que sea correcta.
- Ana, Laura y Jéssica afirman que una solución a la ecuación que propusieron es –7, por lo que consideran que ese valor también corresponde a una de las dimensiones del rectángulo. ¿Están en lo correcto? Justifiquen su respuesta.

Comparen sus respuestas y procedimientos con otro equipo, y verifiquen que sean correctos. Corríjanlos si es necesario.

3. En equipos de tres compañeros resuelvan el siguiente problema.

a) Se sabe que en un teatro hay 1 120 butacas dispuestas de forma tal que el número de filas es igual al número de columnas más 3. ¿Cuántas filas y columnas de butacas tiene el teatro?

- Escriban el procedimiento que utilizaron para encontrar el número de columnas y filas que hay en el teatro.

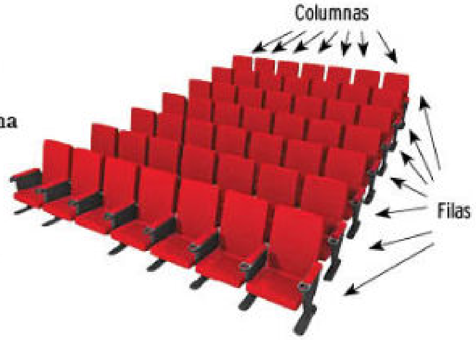


Fig. 1.3

- Escriban una ecuación que exprese esta situación en términos de la cantidad de butacas y del número de columnas.

- ¿Cuál o cuáles números satisfacen la ecuación?

b) Comparen sus respuestas con las de otros equipos. Discutan si la o las soluciones a su ecuación también resuelven la situación problemática planteada.

Una ecuación en la que el mayor exponente de la incógnita es 2, se denomina *ecuación cuadrática*. Así, $x^2 = 4$ y $x^2 + x = 12$ son ecuaciones cuadráticas.

Reflexionen. ¿Todas las ecuaciones que representan las situaciones anteriores son ecuaciones cuadráticas? Justifiquen su respuesta.

4. En equipos resuelvan lo siguiente.

a) Si el producto de dos números consecutivos es igual a 240, ¿cuáles son esos números?

Número consecutivo: es el que sigue a un número anterior. Ejemplo, 1, 2, 3 y 4 son números consecutivos, y 5, 7, 9 y 11 son números impares consecutivos.

- ¿La solución al problema pueden ser números negativos?
- Si la respuesta es afirmativa, indiquen de qué números se trata; si es negativa, justifiquen su respuesta.
- Escriban una ecuación que represente esta situación.
- ¿Esta ecuación es cuadrática? ¿Por qué?
- Describan su procedimiento para encontrar los números consecutivos que satisfacen esta situación.

Comparen sus respuestas con las de otros equipos y determinen cuántas soluciones distintas puede tener la ecuación que representa esta situación. ¿Qué procedimiento les parece más adecuado?

5. En parejas resuelvan el siguiente problema.

a) Si el producto de dos números pares consecutivos es -24, ¿de qué números se trata?

- Planteen una ecuación que represente el problema.
- ¿Qué números solucionan el problema?

Comparen su respuesta con la de otras parejas y en grupo reflexionen si todas las ecuaciones cuadráticas tienen solución. Con apoyo del profesor escriban en su cuaderno las conclusiones.

Te invito a...
visitar la dirección electrónica www.edutics.mx/ouV. Ingresa a Pequeño taller y resuelve las dos primeras actividades. Compara tus procedimientos con los de tus compañeros y validen sus respuestas con ayuda de su profesor. (Consulta: 17 de enero de 2019).

Integración

6. En grupo respondan lo siguiente con ayuda de su profesor.

a) ¿Cuántas soluciones puede tener una ecuación cuadrática? Justifiquen su respuesta.

b) Si existe más de una solución que satisfaga una ecuación cuadrática, ¿ésta será válida como respuesta o dependerá de la situación que represente esa ecuación cuadrática? Expliquen su respuesta.

Operación inversa: es la que anula o revierte los efectos de una operación. Por ejemplo, la resta es la operación inversa de la suma; la división de la multiplicación, la potencia de la raíz, etcétera.

Opera a la inversa

7. En equipos resuelvan el siguiente problema.

a) El largo de una pintura mide $\frac{7}{5}$ de su ancho. Si el área que ocupa es de 3 500 cm², ¿cuáles son las dimensiones de la pintura?

Fig. 1.4 Giacomo Balla, *Pesimismo y optimismo*, 1923.

- Escriban una ecuación cuadrática que represente esta situación.
- ¿Cuánto miden los lados de la pintura?
- Resuelvan el problema con operaciones inversas. Describan su procedimiento.

Intercambien con otro equipo su procedimiento y resultado para que mutuamente los revisen. Si consideran que existen errores, coméntenlo con el otro equipo y corríjanlos.

8. En parejas resuelvan lo siguiente.

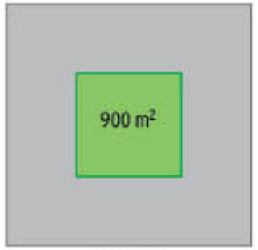


Fig. 1.5

a) En un parque con forma cuadrada hay un jardín en el centro también cuadrado, como se muestra en la figura 1.5. El área que ocupa el jardín es de 900 m^2.
- Escriban la ecuación cuadrática que represente el área del jardín en términos de sus dimensiones.
- ¿Cuánto mide la longitud de cada lado del jardín? Resuelvan el problema con operaciones inversas.

b) Se sabe que la parte del parque que no incluye el jardín ocupa un área de 1 600 m^2. Anoten una ecuación cuadrática que exprese el área total del parque en términos de sus dimensiones.
- Resuelvan la ecuación mediante operaciones inversas. ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación anterior? Señalen la o las soluciones.
- ¿Cuál es la longitud de los lados del parque?

9. En equipos resuelvan lo siguiente.

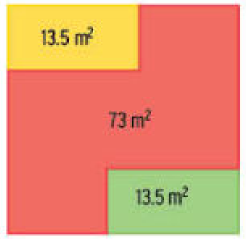


Fig. 1.6

a) La figura 1.6 muestra la vista superior de una casa con forma cuadrada. Las áreas del estacionamiento y el jardín se muestran en color amarillo y verde, respectivamente; cada una tiene una superficie de 13.5 m^2. Si la superficie de la casa, sin contar el jardín y el estacionamiento, es de 73 m^2, ¿cuáles son las dimensiones del terreno? Resuelvan el problema utilizando operaciones inversas.

En grupo revisen los resultados y procedimientos de los problemas anteriores con ayuda de su profesor. Corríjanlos si es necesario.

Consolido mis aprendizajes

1. Retoma la situación inicial y resuelve lo siguiente.

a) Uno de los miembros del grupo de exploradores propone elaborar los banderines según el diseño que muestra la figura. Se sabe que el área de color rojo es tres veces mayor que el área de color blanco.
- ¿Cuánto mide de largo la figura con forma de cruz?

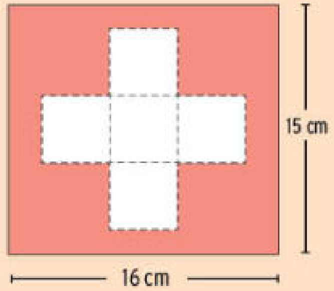


Fig. 1.7

En grupo comparen sus procedimientos para resolver los problemas de la lección con los que utilizaron para solucionar las ecuaciones que plantearon. Analicen las ventajas y desventajas de cada uno.

2. ¿Qué características debe tener un problema para que su resolución implique una ecuación de segundo grado?

3. Inventa una situación que se represente con la ecuación cuadrática $x^2 - 16 = 65$.

4. La rapidez, v, de un tsunami en cualquier punto del mar está dada por la relación $v^2 = 9.8d$, donde d es la profundidad del fondo marino en ese punto.

a) ¿Cuál fue la rapidez del tsunami de Japón que ocurrió en 2011 si la profundidad del agua, d, donde sucedió el sismo es de 14 100 m?

5. La pantalla de televisión que ilustra la figura 1.8 tiene un área de 544.44 cm^2. La relación entre el alto y el ancho de la pantalla se muestra en la figura.

Fig. 1.8

a) Escribe una ecuación cuadrática que represente el área de la pantalla.
b) ¿Cuáles son las medidas de sus lados?

6. La figura 1.9 muestra la imagen de un disco compacto. La zona del disco que contiene los datos es una corona circular de área A, cuya medida se muestra en la imagen. El diámetro del círculo formado por la zona que no contiene datos, d, se indica en la figura.

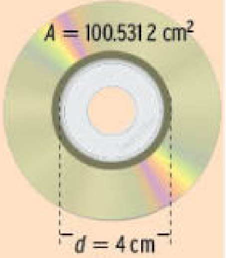


Fig. 1.9

a) ¿Cuánto mide el radio que corresponde a toda la circunferencia que forma el contorno del disco?

En grupo comparen sus respuestas y procedimientos. Verifiquen que sean correctos y determinen qué procedimientos resultan más prácticos.

A imagen y semejanza

Inicio a partir de lo que sé

Formen parejas y resuelvan el siguiente problema.

La figura 1.10 es un fragmento de una pintura cubista. Obsérvala.

Fig. 1.10

En la clase de Artes Visuales de la secundaria Rufino Tamayo se organizó un concurso entre los alumnos para ver quién hacía la mejor copia de esa obra. A continuación se muestran las obras finalistas. Supongamos que ustedes son los jueces y que el criterio para elegir al ganador es que la obra sea lo más parecida a la original. ¿A quién elegirías?

Luciana

Fig. 1.11

María

Fig. 1.12

Joao

Fig. 1.13

Edson

Fig. 1.14

a) Expliquen cómo eligieron la obra ganadora y por qué descartaron las otras.

Resuelvo y aprendo

Figuras semejantes

1. En equipos resuelvan los siguientes problemas.

a) El Colibrí es una reserva ecológica que ocupa un terreno rectangular de 20 km de largo por 5 km de ancho. Paco quiere representarlo a escala y comenzó a dibujarlo como se muestra en la figura 1.15. Ayúdenlo a completar el contorno del terreno.

Fig. 1.15

- ¿Con cuántos cuadritos representaron el ancho? ______
- El papá de Paco también va a hacer una representación a escala del terreno; el trazo con el que inició su dibujo se muestra en la figura 1.16. Completen el contorno. ¿Con cuántos cuadritos representaron el largo del terreno?

______

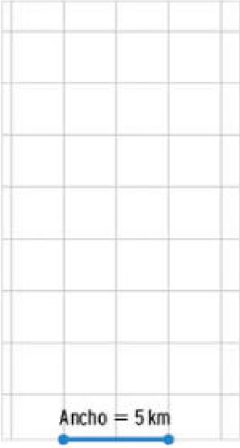


Fig. 1.16

Comparen sus dibujos con los de otros equipos. Con ayuda de su profesor lleguen a una conclusión grupal acerca de los resultados y respondan.

- Si dividen el número de cuadritos del largo de la figura que hizo Paco entre el número de cuadritos del ancho, ¿qué resultado obtienen?

______

- Si dividen el número de cuadritos del largo de la figura que hizo el papá de Paco entre el número de cuadritos del ancho de la figura, ¿cuál es el resultado?

______

- Expliquen el porqué de esos resultados. ______

______

- Si en otra representación a escala del terreno el ancho es de 3 cuadritos, ¿cuántos cuadritos medirá el largo? ______
- Si en otra representación más, el largo es de 15 cuadritos, ¿cuántos cuadritos medirá el ancho? ______
- En los dos ejemplos anteriores, ¿cuánto vale el cociente de dividir el largo entre el ancho de cada rectángulo a escala? ______

Se dice que los rectángulos que hicieron Paco y su papá son *semejantes*.

- ¿Un rectángulo de 2.5 cuadritos de ancho por 12.5 cuadritos de largo es semejante al terreno de la reserva ecológica? Justifiquen su respuesta.

______

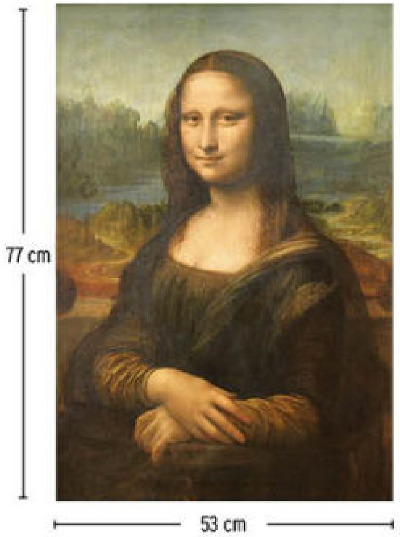


Fig. 1.17

2. En parejas resuelvan el siguiente problema.

a) En la clase de Arte de Ana quieren hacer una réplica de La Gioconda, también conocida como La Mona Lisa, la famosa obra de Leonardo da Vinci. Si las medidas de la pintura original son 77 cm × 53 cm, y en la réplica el lado menor debe medir 70 cm, ¿cuánto tendrá que medir el lado mayor para que la réplica no presente distorsión?

___

- En una hoja blanca tracen un rectángulo cuyos lados sean proporcionales a los lados del cuadro de La Gioconda, de manera que ambos rectángulos sean semejantes. ¿Cuánto miden los lados del rectángulo que trazaron?

___

- Comparen el rectángulo que construyeron con el de otras parejas y anoten las diferentes bases y alturas en la siguiente tabla.

Base (cm)	53	70			
Altura (cm)	77				

- A partir de los datos que recabaron, localicen en el siguiente plano cartesiano los puntos que corresponden a la base y a la altura. Las medidas de la base pertenecen al eje horizontal y las de la altura, al vertical. Cada par de datos de base y altura constituyen un par ordenado *P*(*base*, *altura*). Unan los puntos.
- ¿Qué característica tiene la gráfica que resulta de unir los puntos que localizaron?

___

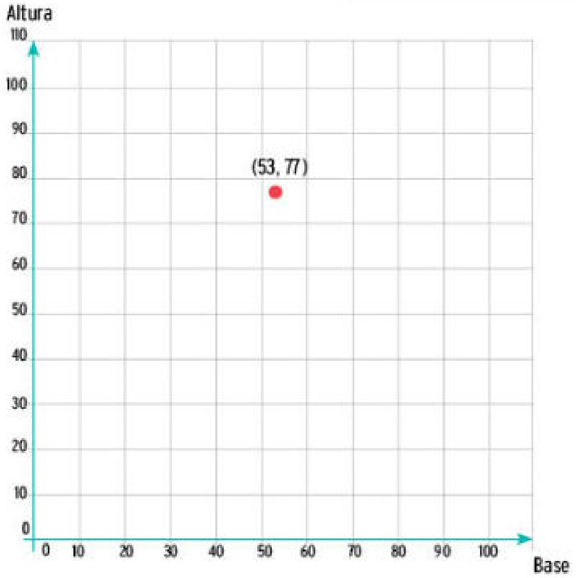


Fig. 1.18

- ¿Qué relación tiene la forma de la gráfica con las características de los rectángulos?

___

- Encuentren dentro de la gráfica las coordenadas de un punto distinto a los que localizaron. Indiquen sus coordenadas.

___

- ¿Ese punto corresponde a la base y la altura de otro rectángulo semejante? ¿Por qué?

___

- Localicen en la gráfica la medida de la altura del rectángulo cuya base es de 40 cm y es proporcional al cuadro de La Gioconda. Anoten su valor.

___

3. Al resolver los problemas anteriores han construido rectángulos semejantes e identificado algunas de sus características. A continuación trabajaremos la semejanza de triángulos. Realicen las siguientes actividades en equipo.

a) En una hoja de reúso construyan un triángulo con un lado de 5 cm y cuyos ángulos adyacentes a ese lado midan 105° y 45°, respectivamente. Nómbrenlo como triángulo B.

- Tracen otros dos triángulos cuyos ángulos tengan las mismas medidas que el triángulo anterior, pero uno de menor tamaño (triángulo A) y otro de mayor tamaño que el original (triángulo C).
- Recorten los tres triángulos y háganlos coincidir sobre alguno de sus ángulos idénticos como se muestra en la figura 1.19.
- Midan los lados de los triángulos y anoten sus resultados en la tabla.

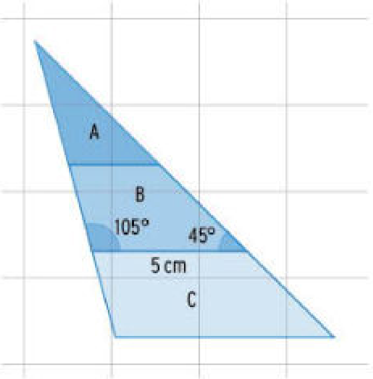


Fig. 1.19

Triángulo	Medida del lado menor (cm)	Medida del lado mediano (cm)	Medida del lado mayor (cm)
A			
B	5		
C			

- Elijan pares de triángulos y dividan los lados correspondientes como se indica a continuación. Completen las operaciones.

$\frac{\text{Lado mayor del triángulo C}}{\text{Lado mayor del triángulo B}} = \frac{\quad}{\quad} =$ ____ $\qquad \frac{\text{Lado menor del triángulo C}}{\text{Lado menor del triángulo A}} = \frac{\quad}{\quad} =$ ____

$\frac{\text{Lado mediano del triángulo C}}{\text{Lado mediano del triángulo B}} = \frac{\quad}{\quad} =$ ____ $\qquad \frac{\text{Lado mayor del triángulo B}}{\text{Lado mayor del triángulo A}} = \frac{\quad}{\quad} =$ ____

$\frac{\text{Lado menor del triángulo C}}{\text{Lado menor del triángulo B}} = \frac{\quad}{5\text{ cm}} =$ ____ $\qquad \frac{\text{Lado mediano del triángulo B}}{\text{Lado mediano del triángulo A}} = \frac{\quad}{\quad} =$ ____

$\frac{\text{Lado mayor del triángulo C}}{\text{Lado mayor del triángulo A}} = \frac{\quad}{\quad} =$ ____ $\qquad \frac{\text{Lado menor del triángulo B}}{\text{Lado menor del triángulo A}} = \frac{\quad}{\quad} =$ ____

$\frac{\text{Lado mediano del triángulo C}}{\text{Lado mediano del triángulo A}} = \frac{\quad}{\quad} =$ ____

- Comparen los resultados de cada pareja de triángulos. ¿Qué observan?

___

Comparen con otros equipos sus resultados y procedimientos; discutan acerca de las propiedades que observaron en las figuras.

Integración

Los triángulos con los que trabajaron son *semejantes*.

4. En grupo, con ayuda de su profesor, identifiquen las propiedades de los *triángulos semejantes*.

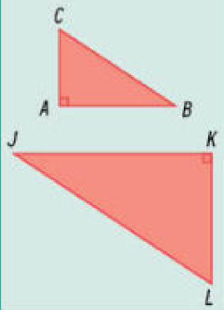
a) Respecto a la medida de sus ángulos: ___

b) Respecto a la medida de sus lados: ___

En general, todas las figuras geométricas que cumplen estas propiedades se dice que son *semejantes*.

Notación
Para denotar la *semejanza* de dos figuras geométricas, como los triángulos de la imagen, se utiliza el símbolo ~. Por ejemplo, para indicar que el triángulo, cuyos vértices son *A*, *B* y *C*, es semejante al triángulo con vértices *K*, *J* y *L*, se escribe:

$\triangle ABC \sim \triangle KJL$



Al cociente de dividir los lados correspondientes de figuras semejantes se le conoce como *razón de semejanza*.

5. Contesten a partir de los triángulos trazados en la actividad 3 de la página anterior.
   a) ¿Cuál es la razón de semejanza entre el triángulo original y la primera copia?
   ______
   b) ¿Cuál es la razón de semejanza entre el triángulo original y la segunda copia?
   ______
   c) Si invirtieran el orden en el que dividen los lados correspondientes, ¿obtendrían la misma razón de semejanza? ______
   d) ¿Por qué es importante conservar el orden en el que se realiza la división de los lados correspondientes? ______

Figuras congruentes

6. En equipo realicen la siguiente actividad.
   a) De las siguientes figuras semejantes identifiquen y marquen las que tengan razón de semejanza 1.

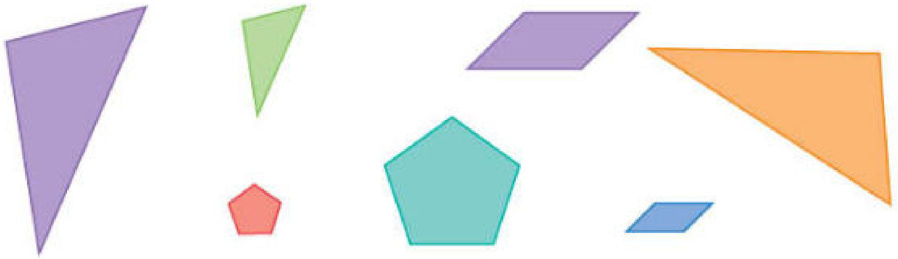


Fig. 1.20

   - ¿Qué datos necesitan para obtener y verificar sus respuestas? ______
   - ¿Cómo las obtuvieron? ______

   Las figuras con esa propiedad se denominan *congruentes*.

   b) Analicen las figuras congruentes y marquen como falsa o verdadera cada afirmación.

Afirmaciones	V	F
Tienen sus ángulos correspondientes iguales.		
Tienen sus lados correspondientes de diferente tamaño.		
Tienen igual perímetro.		

Integración

7. Comparen sus respuestas con las de otros equipos y lleguen a una conclusión grupal sobre las características de las figuras congruentes. Anótenlas en su cuaderno.
   a) Expliquen la diferencia entre figuras congruentes y figuras semejantes.

Las figuras *congruentes* son un caso especial de *semejanza*, en las cuales la razón de semejanza es 1.

8. De manera individual elabora en tu cuaderno una composición trazando una o varias veces figuras congruentes a las que se muestran a continuación. Pregunta a tu maestro de Artes Visuales qué es una composición plástica.

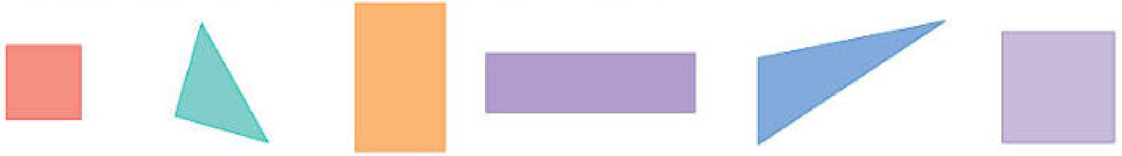


Fig. 1.21

   a) Compara tu composición con las de tus compañeros de grupo. Pidan a su profesor de Arte que las valore y expliquen cómo construyeron figuras congruentes.
   b) Observen el caso de los cuadrados.
      - ¿Cómo son los ángulos de todos los cuadrados?
      ______
      - ¿Cómo son entre sí los lados de todos los cuadrados?
      ______
      - ¿Cómo son entre sí los cuadrados que no son congruentes?
      ______
      - De acuerdo con sus respuestas, indiquen cómo son entre sí todos los cuadrados.
      ______

Consolido mis aprendizajes

1. De manera individual realiza las siguientes actividades.
   a) Indica quién es el ganador del concurso en el problema de la página 24.
      - Argumenta por qué lo seleccionaste.
   b) Identifica en la obra cubista dos parejas de triángulos congruentes y márcalos.
   c) Construye una réplica de un sector que elijas de la pintura de manera que la razón de semejanza entre la copia y la imagen sea 1 a 2. Usa tu juego de geometría y considera las propiedades de las figuras semejantes.

Fig. 1.22

¿En qué se parecen?

Inicio a partir de lo que sé

En parejas resuelvan el siguiente problema.

En una ventana rectangular que mide 161.7 cm × 40 cm, Sandra quiere hacer un vitral como muestra el siguiente modelo a escala.

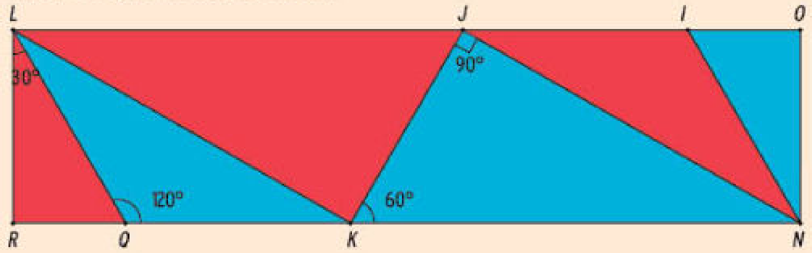


Fig. 1.23

Sandra sólo quiere dar al vidriero las medidas indispensables para que corte los vidrios en forma triangular como indica el modelo.

a) Escriban en sus cuadernos las medidas que Sandra debe dar al vidriero para que corte todos los vidrios de manera correcta.

b) Compartan sus medidas con las de otras parejas y, con base en ellas, reproduzcan en sus cuadernos los triángulos a escala.

c) Verifiquen que los triángulos que trazaron correspondan con los del vitral. Si no coinciden, corrijan las medidas.

En grupo concluyan cuáles son las medidas indispensables que deben dar al vidriero para que reproduzca los triángulos con las medidas que Sandra necesita.

Resuelvo y aprendo

Criterios de congruencia entre triángulos

1. En equipos realicen las siguientes actividades.

a) Emilio y Celeste necesitan construir dos marcos de madera triangulares como los de la figura 1.24, pero de manera que ambos sean congruentes. Emilio piensa que para construir los triángulos congruentes es suficiente que dos de sus lados correspondientes sean iguales. Celeste, en cambio, dice que todos los lados correspondientes deben ser iguales.

- ¿Quién tiene razón? Escriban los argumentos en los que basaron su elección.

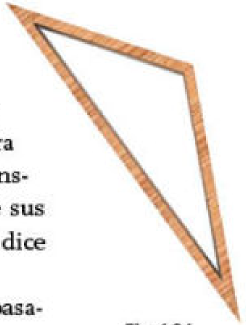


Fig. 1.24

- Consigan popotes, tijeras, tachuelas o alfileres y pegamento. Recorten y unan los popotes con las tachuelas para construir un triángulo congruente con el de la figura 1.24.
- Con dos de los popotes con que construyeron el triángulo traten de formar un triángulo que no sea congruente con el anterior. ¿Pudieron hacerlo? ¿Por qué?

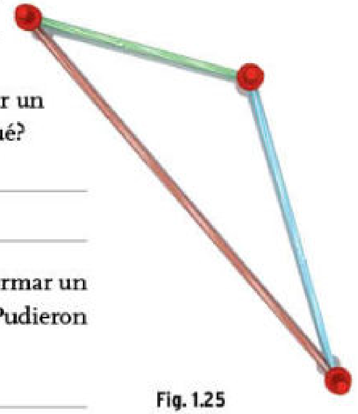


Fig. 1.25

- Con los tres popotes con que construyeron el triángulo inicial intenten formar un triángulo que no sea congruente con el triángulo de la figura 1.24. ¿Pudieron hacerlo? ¿Por qué?

b) Juan construyó un triángulo cuyos lados miden 2 cm, 5 cm y 6 cm. Si María hizo otro cuyos lados miden 5 cm, 2 cm y 6 cm, ¿cómo son entre sí los triángulos?

c) Recorten 2 segmentos de popote: uno de 4 cm y otro de 3.5 cm, y formen un ángulo de 45° uniéndolos por uno de sus extremos como se muestra en la figura 1.26. ¿Podrían completar un triángulo con esos segmentos? Recorten de un popote el segmento que falta para hacerlo.

- ¿Cuánto mide el lado opuesto al ángulo de 45°? ____
- Comparen su construcción con la de otros equipos. ¿Cómo son entre sí los triángulos?

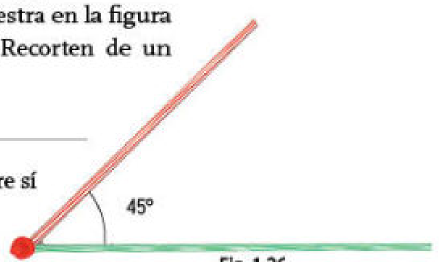


Fig. 1.26

- ¿Podrían construir un triángulo no congruente con el anterior que conserve la medida de los popotes iniciales y el ángulo entre ellos? Escriban sus conclusiones.

d) Deshagan el triángulo que formaron. Con los segmentos más cortos formen un ángulo de 45° y con otro segmento de popote completen el triángulo. ¿Cuánto mide el lado faltante?

- Analicen si para que dos triángulos sean congruentes es suficiente con que tengan dos lados y un ángulo iguales. Justifiquen su respuesta.

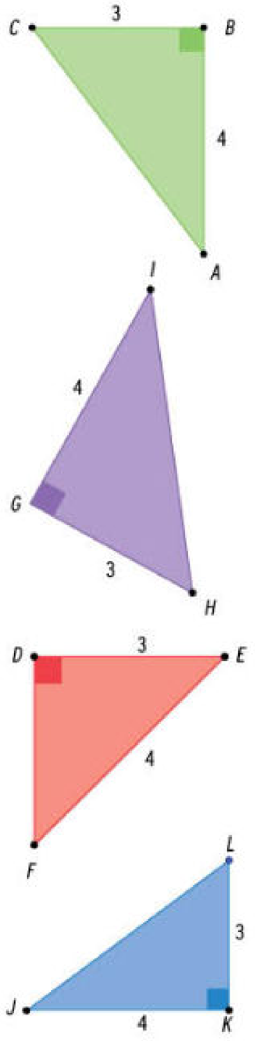


Fig. 1.27

e) Identifiquen en la figura 1.27 qué tienen en común todos los triángulos.

- Identifiquen los triángulos congruentes.
- Expliquen qué condiciones deben cumplir dos triángulos para ser congruentes si se conocen dos de sus lados correspondientes y uno de sus ángulos.
- Comparen sus respuestas con las del grupo y establezcan una conclusión general.

f) Por separado cada integrante del equipo trace en su cuaderno un segmento de recta de 8 cm de longitud, y en sus extremos dos ángulos, uno de 45° y el otro de 30°. Extiendan el lado de los ángulos que no coincide con la recta de 8 cm de longitud hasta que se intersequen.

Fig. 1.28

- Midan los lados del triángulo que trazaron y el ángulo que se formó en la intersección.
- Comparen los triángulos que trazaron con los de otros equipos. ¿Cómo son los triángulos entre sí?
- Lean las siguientes instrucciones y subrayen aquellas con las que obtendrían triángulos congruentes con el anterior. En sus cuadernos corrijan aquellas con las que no se obtienen. Agreguen la información mínima necesaria o eliminen la que no sea útil.
  - Traza un ángulo de 45° y prolonga ambos lados: uno debe tener 8 cm de longitud. En el otro traza un ángulo de 30° de manera que uno de sus lados pase por el extremo opuesto del lado de 8 cm para formar un triángulo.
  - Traza un segmento de 8 cm. En uno de sus extremos traza un ángulo de 30° y en el otro, un ángulo de 45°. Prolonga los lados de ambos hasta que coincidan.
  - Traza un segmento de 8 cm. En uno de los extremos marca un ángulo de 30°, prolonga el otro lado del ángulo y sobre él traza un ángulo de 45° de modo que su otro lado pase por el extremo del segmento de 8 cm donde no se trazó el ángulo de 30°.

Comparen sus respuestas con las de otros equipos y, con ayuda de su profesor, lleguen a una conclusión sobre las condiciones necesarias para obtener triángulos congruentes a partir de las medidas de dos de sus ángulos y uno de sus lados.

Las condiciones mínimas que dos triángulos deben cumplir para que sean congruentes se conocen como *criterios de congruencia*.

Notación
Por lo común, para nombrar los *criterios de congruencia* se utiliza una combinación de las letras *L* y *A*. La *L* significa lado y la *A*, ángulo. El orden en que se escriben es importante porque indica el orden de los elementos del triángulo que se considerarán para verificar la congruencia. Para nombrar el criterio, las letras pueden repetirse.

Integración

2. En grupo respondan las preguntas y completen los enunciados con ayuda de su profesor.

a) ¿Qué elementos se consideraron para construir triángulos congruentes en la actividad del inciso a) de la página 30? ____

b) ¿Qué elementos consideraron en el inciso c) de la página 31? ____

c) ¿Y cuáles en el inciso f) de la página anterior? ____

d) Para determinar si dos triángulos son congruentes, se pueden usar los siguientes criterios:

- Criterio *LLL*. Cada uno de los lados correspondientes de ambos triángulos deben ser ____
- Criterio *LAL*. Dos triángulos son congruentes si tienen dos lados ____ y el ángulo comprendido entre ellos mide ____
- Criterio *ALA*. Dos triángulos son congruentes si tienen un lado ____ y los ángulos correspondientes, adyacentes a ese lado, son ____

Criterios de semejanza entre triángulos

3. Así como existen criterios para identificar si dos triángulos son congruentes, también los hay para identificar si dos triángulos son semejantes. Estos criterios se trabajarán a continuación. En equipos resuelvan los siguientes problemas.

a) Observen los triángulos e identifiquen los que son semejantes. Completen los enunciados.

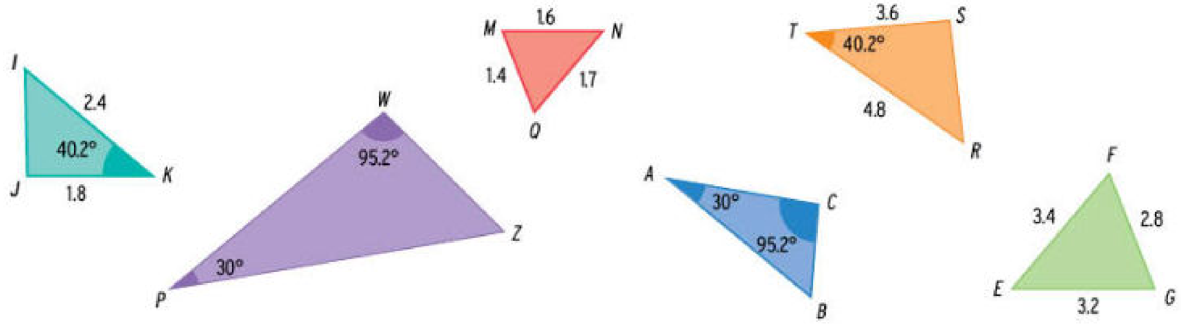


Fig. 1.29

- El triángulo *ABC* es semejante al triángulo ____
- El triángulo ____ es semejante al triángulo *NQM*.
- El triángulo *JKI* es semejante al triángulo ____

b) Cada integrante del equipo construya un triángulo con un ángulo de 30° y otro de 95.2°.

- ¿Cuánto mide el tercer ángulo? ______
- Midan la longitud de los lados del triángulo que trazaron y dividan cada una entre las longitudes correspondientes de los lados del triángulo ABC. ¿Qué observan?

______

- Repitan el paso anterior con las longitudes del triángulo PZW. ¿Qué observan?

______

- ¿Cómo son entre sí los ángulos de los tres triángulos? ______

c) Tracen un triángulo cuyos lados midan 4.8 cm, 4.2 cm y 5.1 cm.

- Multipliquen las medidas de los lados del triángulo MQN por 3, y comparen los resultados con las medidas del triángulo que trazaron. ¿Qué observan?

______

- ¿Existe un número por el que al multiplicar las longitudes de alguno de los triángulos de la imagen (distinto al triángulo MQN) obtengan las del triángulo que trazaron?

______

- Si su respuesta es afirmativa, indiquen cuál es ese número y de qué triángulo se trata.

______

- Midan los ángulos de los triángulos con los que han trabajado en este inciso. ¿Qué observan?

______

- ¿Cómo son entre sí estos triángulos? ______

d) Construyan un triángulo con dos lados, de 0.9 cm y 1.2 cm, y que ambos formen un ángulo de 40.2°.

- Dividan las medidas de los lados del triángulo que acaban de trazar entre las medidas de los lados que forman el ángulo de 40.2° del triángulo IJK. ¿Qué observan?

______

- Repitan el paso anterior dividiendo entre las medidas de los lados que forman el triángulo RST. ¿Qué observan?

______

- ¿Cómo son entre sí los tres triángulos? ______

Comparen sus respuestas con las del resto del grupo y con ayuda de su maestro escriban una concusión sobre los criterios de semejanza entre triángulos.

Integración

4. En grupo enuncien los criterios de semejanza de triángulos con ayuda de su profesor. Completen los enunciados.

a) Criterio *LLL*. Dos triángulos son semejantes si sus lados correspondientes son ______.

b) Criterio *AA*. Dos triángulos son semejantes si dos de sus ángulos correspondientes son ______.

c) Criterio *LAL*. Dos triángulos son semejantes si dos de sus lados correspondientes son ______ y el ángulo comprendido entre ellos es ______.

Consolido mis aprendizajes

1. Identifica en el problema inicial las parejas de triángulos congruentes y el criterio de congruencia que utilizaste para reconocerlos.

a) Triángulos *JKL* y ____ Criterio ______

b) Triángulos *LOK* y ____ Criterio ______

c) Triángulos *NOI* y ____ Criterio ______

2. Identifica una pareja de triángulos semejantes que no sean congruentes y el criterio que utilizaste para reconocerlos.

a) Triángulos ______ Criterio ______

______

3. Escribe en tu cuaderno las medidas indispensables que darías al vidriero para que cortara los triángulos como Sandra los necesita.

4. Utiliza los criterios de congruencia o semejanza de triángulos para determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. En caso de ser verdaderas, escribe el criterio de congruencia o semejanza que empleaste para responder.

Afirmación	Verdadero o Falso	Criterio
Dos triángulos con dos ángulos iguales son congruentes.		
Si los lados de un triángulo miden la mitad que los lados de otro triángulo, entonces son semejantes.		
Si dos triángulos tienen dos ángulos iguales y uno de los lados de un triángulo mide lo mismo que uno de los lados del otro triángulo, son congruentes.		
Todos los triángulos isósceles rectángulos son semejantes.		
Todos los triángulos equiláteros son semejantes.		

Te invito a...

Los programas de geometría dinámica te ofrecen grandes posibilidades de aplicar los conocimientos y habilidades que adquieres en clase, y de descubrir relaciones geométricas que con lápiz y papel o sólo usando la imaginación serían muy difíciles de percibir. Aplica lo que aprendiste sobre la semejanza y congruencia de figuras usando las Habilidades digitales de este bloque, que encontrarás en la página 59.

Representaciones de una misma situación

Inicio a partir de lo que sé

Organicen el grupo en parejas y resuelvan lo siguiente.

La figura A muestra un vaso graduado que contiene 3 gotas de colorante azul completamente disuelto en la cantidad de agua que se indica. El vaso de la figura B contiene agua pura en la cantidad que se muestra.

Figura A Figura B

Fig. 1.30

a) ¿Qué cantidad de colorante azul se requiere disolver en el vaso de la figura B para que el agua tenga la misma tonalidad que la del vaso de la figura A? Expliquen su procedimiento.

b) ¿Esta situación corresponde a una relación de proporcionalidad? Justifiquen su respuesta.

Resuelvo y aprendo

Análisis de representaciones que corresponden a una misma situación

1. Resuelvan en equipos lo siguiente. Al terminar comparen sus respuestas con las de otros equipos.

a) En cierta época del año, en la comunidad El Olivo se raciona el agua por falta de lluvias. El director del sistema hidráulico municipal ha decidido abastecer cada casa sólo tres días a la semana. Por tal motivo, la familia de Carlos deja abierta la llave de la cisterna, en esos días, para que se llene. La gráfica muestra la cantidad de agua que llega, por minuto, a la casa de Carlos: el eje horizontal corresponde al tiempo y el eje vertical, a la cantidad de agua.

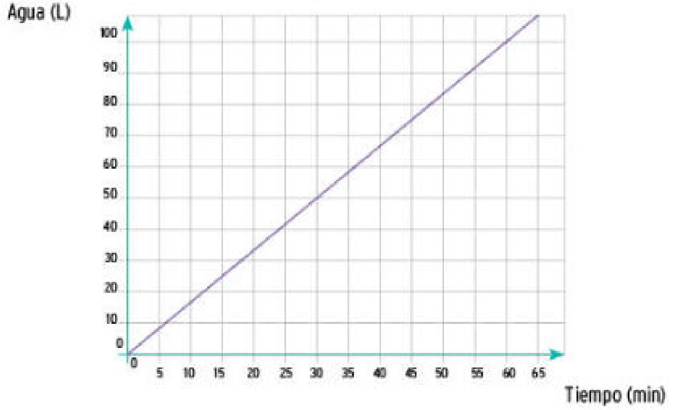


Fig. 1.31

- Si la cisterna tiene una capacidad de 1200 L, ¿cuánto tiempo tarda en llenarse? ______

- ¿Qué cantidad de agua recibe la familia de Carlos en 30 minutos durante los días en los que se les distribuye? ______
- ¿En cuánto tiempo reciben 100 L? ______
- ¿Qué cantidad reciben en un minuto? ______
- Escribe una expresión algebraica que represente el problema. Recuerda que una relación lineal tiene la forma $y = ax + b$. ______

b) ¿Cuál o cuáles de las siguientes situaciones se pueden representar con la gráfica anterior? Justifiquen su respuesta.

______

- La tarifa nocturna de un servicio de taxi, si el banderazo de salida es de \$20.00 y por cada kilómetro de recorrido se cobra \$1.00, de modo que al recorrer 30 km, el precio a pagar es \$50.00.
- El precio de cierta cantidad de harina de arroz y su masa, si se sabe que 100 gramos de harina cuestan 60 centavos.
- Un automóvil se mueve con rapidez constante y recorre 50 kilómetros en 30 minutos.

Comparen sus respuestas y sus explicaciones con las de sus compañeros. Discutan las diferencias y corrijan los posibles errores.

2. Resuelvan en parejas las siguientes actividades.

a) Completen la siguiente tabla, la cual relaciona la tarifa que se paga por el servicio de taxi del problema anterior de acuerdo con la distancia recorrida.

Tarifa (pesos)	50	40	30	20
Distancia (km)	30			

- Escriban una expresión algebraica que represente esta relación. ______

b) Realicen lo que se indica con base en el precio de la harina de arroz del problema anterior.

- ¿Cuánto cuesta 1 kg de harina de arroz? ______
- Completen la tabla.

Cantidad de arroz (g)	100	50	30	77
Precio del arroz (centavos)	60			

- Escriban una relación algebraica que represente esta relación.

______

c) Respondan lo siguiente a partir de la relación entre la distancia que recorre el automóvil y el tiempo que emplea en hacerlo según el problema del inciso b) de la página anterior.

- ¿Qué distancia recorre el automóvil en un minuto? ____________________
-

Distancia (km)	100	60	30	77
Tiempo (min)	60			

- Escriban la relación algebraica que representa esta relación. ____________

d) Comparen las tres situaciones y sus diferentes representaciones.

- ¿Las tres situaciones se pueden representar con la misma expresión algebraica? ¿Cuáles sí y cuáles no?
- Comparen las situaciones que se representan con la misma gráfica con las que se representan con la misma ecuación. ¿Qué observan?
- ¿Qué situaciones podrían representarse con la misma tabla?

Compartan y comenten en grupo sus resultados.

3. Analicen en equipos la siguiente situación y respondan.

a) La constructora Hogar, S. A. está por entregar un lote completo de casas unifamiliares, por lo que ha contratado a varios pintores para terminar a tiempo. El contratista encargado estima que un pintor, en promedio, pinta una superficie de 8 m^2 en una hora.

- ¿En cuánto tiempo pintarán dos trabajadores la misma superficie?
- Si por la urgencia de la entrega el contratista necesita que se pinten 8 m^2 cada 15 minutos, ¿cuántos pintores deberán trabajar en esa superficie? Consideren que todos trabajan al mismo ritmo.
- Completen la tabla.

Número de pintores	1	2	8	16
Tiempo en el que pintan una superficie de 8 m^2 (h)	1			

- Tracen en su cuaderno la gráfica que corresponde a esta situación.
- Escriban una expresión algebraica que describa esta situación.

- ¿Cuál o cuáles de las siguientes situaciones es posible representar con la misma ecuación y una tabla similar? Subrayen sus respuestas.
  - La relación entre el tiempo que se tarda en descargar en una computadora un archivo de datos si se sabe que en un 1 segundo se baja de internet un archivo a 8 megabytes, y que la rapidez de descarga es constante.
  - El tiempo en que se vacía el tinaco de agua en una casa habitación depende del número de llaves abiertas dentro del inmueble. Si se sabe que el flujo de agua en las llaves es el mismo y que con una sola llave abierta el tinaco tarda 8 horas en vaciarse, ¿en cuánto tiempo se vaciará con dos llaves abiertas?
  - ¿Cuánto tarda un tren bala en recorrer 8 km si se desplaza con una rapidez de 1 km/min? ¿Cuánto tiempo tarda si viaja a 2 km/min? ¿Y si su rapidez es de 4 km/min?, etcétera.
- Tracen en su cuaderno la gráfica correspondiente a cada situación anterior y escriban a continuación su respectiva expresión algebraica.
- Comparen las gráficas y las expresiones algebraicas. ¿Cuáles fueron similares?
- ¿Qué tipo de relación representan las situaciones cuyas gráficas y expresiones algebraicas fueron similares?

b) Inventen en parejas dos situaciones distintas que se puedan representar con la siguiente expresión algebraica: $y = 3x + 1$.

Integración

4. Completen en grupo, con la supervisión de su profesor, los siguientes enunciados.

a) Una relación de proporcionalidad entre dos cantidades o dos conjuntos de cantidades pueden expresarse de distintas maneras, por ejemplo, mediante una tabla, ____________ y ____________.

b) De igual manera, una misma expresión algebraica, tabla o gráfica puede representar distintas ____________.

Situaciones que corresponden a una relación de proporcionalidad

5. Completen en parejas las tablas que corresponden a las siguientes situaciones.

a) La temperatura de un calentador eléctrico para acuario si al conectarlo a la corriente eléctrica su temperatura era de 0 °C y en un minuto alcanzó 18 °C. Su aumento de temperatura es uniforme.

b) La edad de Andrés y Verónica si se sabe que cuando Andrés cumpla 18 años, tendrá 2 veces la edad de Verónica.

Tiempo (minutos)	Temperatura (°C)
0	0
1	
3	
5	90
6	

Edad de Verónica (años)	Edad de Andrés (años)
9	
18	
20	
50	
80	71

- A partir de la información de las tablas anteriores tracen las gráficas correspondientes.

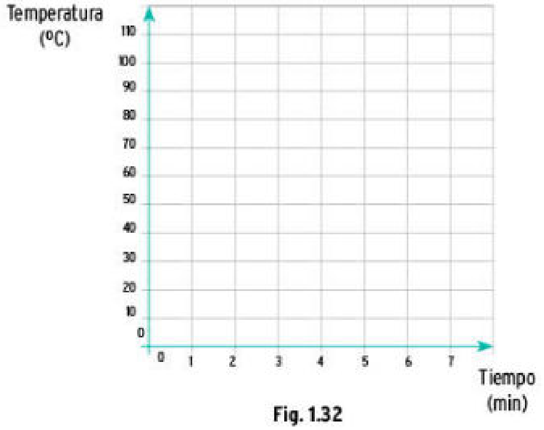


Fig. 1.32

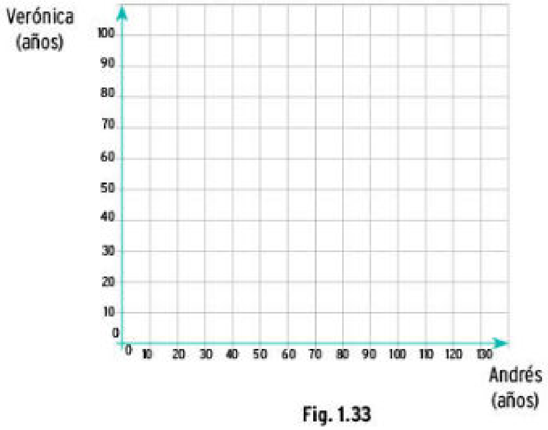


Fig. 1.33

- ¿Las situaciones anteriores representan una relación de proporcionalidad directa?

____

- Si sólo pudieran ver las gráficas de cada situación, ¿cómo sabrían si son de proporcionalidad directa? Expliquen su respuesta.

____

Comparen sus respuestas y discútanlas en grupo. Al final anoten sus conclusiones en su cuaderno.

6. Inventen en equipos dos situaciones: una que corresponda y otra que no corresponda a una relación de proporcionalidad directa. Anótenlas en su cuaderno.

Integración

7. Completen en grupo, con ayuda de su profesor, los siguientes enunciados.

a) Una relación de proporcionalidad directa se expresa algebraicamente mediante una expresión de la forma ______________, donde __________ es la constante de proporcionalidad.

b) La gráfica que corresponde a una relación de proporcionalidad directa tiene la siguiente característica: es una ______________ que pasa por ______________

c) En una relación de proporcionalidad directa, el cociente de los datos correspondientes dispuestos en una tabla es un valor ________________ que corresponde con la __________ de proporcionalidad.

Te invito a...

visitar la siguiente dirección electrónica: www.edutics.mx/out donde podrás encontrar situaciones de proporcionalidad. (Consulta: 17 de enero de 2019).

Consolido mis aprendizajes

1. Resuelvan en parejas la siguiente variante del problema inicial.

a) En la figura A se muestra un vaso graduado con 3 gotas de tinta verde disueltas en la cantidad de agua que se indica. En la figura C el vaso contiene 4 gotas de la misma tinta. ¿Qué cantidad de agua se le debe agregar para que tenga el mismo color que la solución del vaso de la figura A? Expliquen cómo encontraron su respuesta.


Figura A Figura C

Fig. 1.34

- ¿La situación anterior corresponde a una relación de proporcionalidad directa? Expliquen.

2. La ley de Boyle-Mariotte, formulada de manera independiente por Robert Boyle y Edme Mariotte en el siglo XVII, describe la relación entre el volumen de un gas y la presión a la que está sometido. Para formular esta relación, Boyle introdujo un gas en un cilindro con un émbolo y midió las distintas presiones al bajar el émbolo, mientras se mantenía una temperatura constante dentro del cilindro. La tabla siguiente muestra los resultados de un experimento similar.

Presión (atm)	Volumen (L)
0.5	60
1.0	30
1.5	20
2.0	15

a) ¿Esta situación corresponde a una relación de proporcionalidad? Expliquen su respuesta.

b) Si la temperatura dentro del cilindro se mantiene constante, ¿cuál es el volumen en litros que corresponde a una presión de 3.0 atm dentro del cilindro?

c) Al hablar de la ley de Boyle-Mariotte se menciona que la temperatura es constante, ¿consideras que está información es necesaria? ¿Por qué? Puedes preguntar a tu maestro de ciencias.

Comparen con otras parejas sus respuestas y procedimientos para determinar cuándo una situación corresponde a una relación de proporcionalidad directa.

Dos maneras de entender una variación cuadrática

Inicio a partir de lo que sé

En equipos resuelvan la siguiente situación.

Los fines de semana, Delia vende playeras en un tianguis. Preocupada por incrementar las ganancias de su negocio, decidió llevar un registro de la cantidad de playeras que vende, lo cual depende de su precio; por ejemplo, si el precio de cada playera es de \$40.00, en promedio vende 20 piezas; pero si reduce el precio en \$1.00, vende 4 piezas más, si lo reduce en \$2, vende 8 más, etcétera.

a) Completen la tabla de registro y los párrafos a partir de la información anterior, y contesten.

Descuento (pesos)	Precio (pesos)	Piezas vendidas	Ingresos (pesos)
0	40	20	$40 \times 20 = 800$
1	$40 - 1 = 39$	$20 + 4(1) = 24$	$(40 - 1)(20 + 4(1)) = 936$
2	$40 - 2 = 38$	$20 + 4(2) = 28$	
3	$40 - 3 = 37$		
4			
5			
6			

b) En la tabla anterior se observa que cuando el descuento ______________, el número de piezas vendidas ______________ y los ingresos ______________.

c) Si continúa la misma tendencia, ¿de cuánto serían los ingresos de Delia si el descuento para cada playera fuera de \$10.00? ______________

d) ¿Y si el descuento fuera de \$25.00, \$30.00 y \$40.00? ______________

____

e) ¿Se pueda afirmar que la relación entre el descuento y el ingreso es proporcional? ¿Por qué?

____

____

f) Escriban dos expresiones algebraicas, una para el precio de la playera en función del descuento y otra para el número de playeras vendidas también en función del descuento.

____

____

g) Con base en la respuesta anterior escriban una expresión algebraica para los ingresos de Delia en función del descuento al precio de las playeras.

____

Resuelvo y aprendo

Expresiones algebraicas y tablas para situaciones de variación cuadrática

1. En equipos analicen y resuelvan las siguientes situaciones.

a) Observen las figuras y resuelvan lo que se indica.

Fig. 1.35

- Dibujen los arreglos que corresponden a los pasos 4, 5 y 6.
- Completen la tabla que en cada paso relaciona el número de elementos de cada figura.

Paso	1	2	3	4	5	7	10	12
Número de elementos	1	4	9					

- Subrayen la expresión algebraica que relaciona cada paso con el número de elementos de cada figura.

$y = 2x$ $y = x^2$ $y = 2x^2$ $y = 2x^2 + x$

- A partir de la expresión algebraica que eligieron, respondan ¿en qué paso la figura tendrá 49 elementos? ______________

b) Analicen la siguiente sucesión.

Fig. 1.36

- ¿Cuál es la característica distintiva de los “rectángulos” de la sucesión?

____

- Dibujen las figuras que corresponden a los pasos 4, 5 y 6.
- Completen la tabla de acuerdo con la relación entre cada paso y el número de elementos de la figura respectiva.

Paso	1	2	3	4	5	7	10	12
Número de elementos								

- Subrayen la expresión algebraica que relaciona el número de elementos de cada figura con su paso correspondiente.

$y = 2x + 1$ $y = x^2 + x$ $y = 2x^2$ $y = 2x^2 + x$

- ¿Cuál es el mayor exponente de la expresión algebraica que relaciona cada paso con el número de elementos de cada figura? ______________

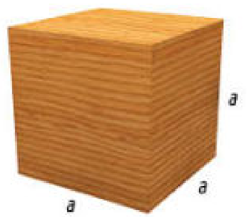


Fig. 1.37

2. En equipos resuelvan el problema.

a) Una fábrica de materiales didácticos produce cubos de madera de diferentes tamaños y colores. Para estimar los costos de la pintura utilizada se elaboró la siguiente tabla.

- Complétenla a partir de sus conocimientos de geometría.

Medida del lado del cubo (cm)	Área de una cara (cm^2)	Área total de las caras (cm^2)
1	1	6
2	4	24
3	9	
4		
5		
6		

- ¿Qué opción expresa la relación entre el área total de las caras de un cubo y la medida de uno de sus lados?

  $y = 6a$ $\quad$ $y = 6a^2$ $\quad$ $y = a^2 + 5$ $\quad$ $y = 3(a + 1)$

- ¿Cuánto mide la arista de un cubo cuya área total es de 384 cm^2? ______
- Anoten en las afirmaciones una V si las consideran verdaderas o una F si son falsas.
  - El área de una cara del cubo es función lineal de la longitud de sus lados. ______
  - El área total del cubo es función cuadrática de la longitud de sus lados. ______
  - El área total del cubo es función lineal del área de una de sus caras. ______

3. En equipos analicen la siguiente situación y respondan.

a) La producción alimentaria se ha incrementado en las últimas décadas gracias al uso de fertilizantes. Supongamos que un modelo cuadrático para la producción de trigo con relación al uso de fertilizantes se representa por la relación: $y = 828 + 33.52x - 0.272x^2$, donde y es la cantidad de trigo producido en kilogramos por cada hectárea, y x la cantidad de fertilizante, también en kilogramos por hectárea.

- Según esa relación, ¿cuántos kilogramos de trigo se producirían en una hectárea si no se usara fertilizante? ______
- En términos de la situación que describe el modelo, ¿cómo interpretarían este resultado? ______
- ¿Cuántos kilogramos de trigo se producirían con 55 kg de fertilizante? ¿Y con 70? ______
- A partir de la información que brinda el modelo, ¿es mejor usar 55 o 70 kg/ha de fertilizante? ______

- Completen la tabla con el modelo propuesto.

Fertilizante (kg/ha)	40	45	50	55	60	65	70	75	80
Trigo producido (kg/ha)	1733.6								

- ¿Si se proporciona más fertilizante la producción de trigo será mayor? ______
- Determinen la cantidad de fertilizante necesaria para obtener la mayor cantidad de trigo por hectárea. ______

4. En parejas resuelvan la siguiente situación.

a) En sus clases de Física estudiaron la caída libre. Supongan que una esfera de 1 kg de masa se deja caer desde una altura de 180 m, se registra cuidadosamente su altura de descenso, y se calcula tanto su rapidez como su energía cinética. Completen la tabla.

Tiempo (s)	Distancia de caída (m)	Rapidez (m/s)	Energía cinética (kg m^2/s^2)
0			
1	5	10	50
2			
3	45	30	450
4			
5	125	50	1 250

- ¿Cuánto tiempo tardó la esfera en llegar al suelo? ______
- ¿Cuál fue su rapidez en ese momento? ______
- ¿Y su energía cinética? ______
- Anoten una V si la afirmación es verdadera y una F si es falsa.
  - Si la esfera recorre 80 m en 4 s, entonces en 8 s recorrería 160 m. ______
  - La rapidez de la esfera es directamente proporcional al tiempo. ______
  - La energía cinética de la esfera es directamente proporcional al tiempo. ______
- Escriban una expresión algebraica para cada una de las siguientes relaciones.
  - La distancia de caída en términos del tiempo. ______
  - La rapidez de la esfera con relación al tiempo. ______
  - La energía cinética en función de la rapidez. ______
- De las expresiones anteriores podemos concluir que la distancia varía de manera ______ respecto al tiempo, y la rapidez varía de manera ______ en relación con ______; mientras que la energía cinética varía de manera ______ respecto a ______.

b) ¿La masa es un dato necesario para obtener la relación entre la distancia y el tiempo? ¿Por qué? ______

En grupo compartan sus resultados y procedimientos, y valídenlos con ayuda de su profesor.

Integración

5. Completen los siguientes enunciados en grupo y valídenlos con ayuda de su profesor.

 a) Una relación de variación cuadrática entre dos variables se puede representar con una ecuación de la forma ________________.

 b) Para analizar una relación de variación cuadrática podemos usar una representación ________ o bien elaborar ________ pues estas dos representaciones resultan ser ________.

6. En equipos resuelvan las siguientes situaciones.

 a) Consideren un triángulo cuya base mide igual que su altura.
 - ¿Cómo expresarían algebraicamente su área en relación con su altura?
 - Si su altura se incrementa en 3 unidades y la base disminuye en 2, ¿cómo se expresaría su área?
 - ¿En este caso sería razonable que la altura del triángulo fuera de 2 unidades o menos? Argumenten su respuesta.
 - ¿El área podría crecer indefinidamente o alcanzaría un valor máximo?, ¿cómo podrían saberlo?

 b) La altura de una caja con forma de prisma de base rectangular es de 8 unidades, mientras que el largo de su base es el triple de su ancho.
 - ¿Cómo se expresa algebraicamente su volumen en función del ancho de la caja?
 - Si el volumen de la caja es de 216 unidades cúbicas, ¿cuáles son las dimensiones de la base? ________________

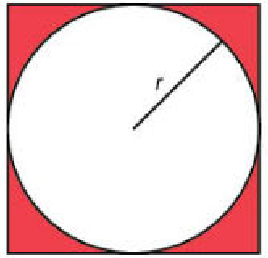


Fig. 1.38

 c) De una lámina cuadrada de metal se corta un círculo de radio r, como se muestra en la figura 1.38.
 - Escriban una expresión algebraica que represente el área de la porción remanente de lámina.
 - Si se cortara un círculo cuyo radio fuera la mitad del radio r, ¿cómo se expresaría entonces el área remanente? ________________

 d) De una esquina de un cuadrado, cuyos lados miden 14 unidades, se corta un cuadrado más pequeño con lado de x unidades de longitud.
 - ¿Cómo se expresa algebraicamente el área remanente? ________________

 e) Si un objeto se suelta desde cierta altura, h, después de un tiempo, t, habrá recorrido una distancia de caída dada por $d = 5t^2$.
 - ¿Qué distancia habrá recorrido el objeto a los 2 segundos después de soltarlo?

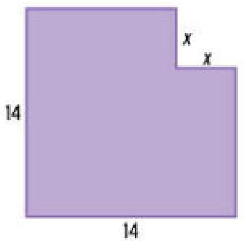


Fig. 1.39

Consolido mis aprendizajes

1. En parejas resuelvan las situaciones.

 a) Volvamos al problema de la sección inicial. Analicen la situación y determinen qué descuento le aportaría a Delia los mayores ingresos. Argumenten su respuesta y compárenla con las de otras parejas. Indiquen qué procedimientos o criterios usaron.
 - ¿Existe una única solución? Si hay más de una, cuál sería la mejor y por qué.

2. Completen la tabla que muestra distintos arreglos hechos con canicas de colores.

Etapa	Figura	Canicas
1	●	
2	● ●●	
3	● ●● ●●●	
4		
5		

 a) ¿Cuál de las siguientes expresiones algebraicas relaciona el número de canicas de cada figura con cada etapa?

 $y = \frac{1}{2}n(n+1)$ $y = n(n+1)$

 $y = (2n - 1)$ $y = n^2 - 1$

 b) Con la expresión algebraica que eligieron determinen el número de canicas que corresponde a la etapa 25.

3. A partir del análisis de las situaciones propuestas en esta secuencia, ¿consideran correcto afirmar que en una relación de variación cuadrática la cantidad que varía siempre alcanza un valor máximo o un valor mínimo? Argumenten su respuesta.

4. En el problema 4 se vio que la energía cinética es una variación cuadrática de la rapidez y que ésta varía linealmente con respecto al tiempo. Entonces, ¿qué tipo de relación existe entre la energía cinética y el tiempo? Expresen algebraicamente esta relación.

5. Individualmente propongan una situación que implique una relación cuadrática y pidan a su pareja que realice una tabla con las variables y deduzca la ecuación que la representa. Hagan lo mismo con la situación que proponga su compañero. Al final validen sus respuestas.

Comparen sus procedimientos con los de otras parejas; si hubo errores, expliquen en qué consistieron y corríjanlos.

Probabilidad de eventos

Inicio a partir de lo que sé

Aborden en parejas la siguiente situación y argumenten sus respuestas.

Necesitan: 3 monedas distintas (de $1.00, $2.00 y $5.00, por ejemplo). Reglas del juego: cada jugador elige "águila" o "sol" y se lanzan las monedas; se gana cuando al menos 2 de las 3 monedas al caer muestran la cara elegida.

a) Realicen 10 lanzamientos y registren al ganador de cada uno. ¿Quién ganó más juegos, el que eligió "águila" o quien eligió "sol"?

b) ¿Este juego es equitativo o algún jugador tiene mayores probabilidades de ganar?

c) Señalen todos los resultados posibles de lanzar las monedas y con base en ellos argumenten en su cuaderno su respuesta a la pregunta anterior. Retomen los procedimientos de conteo que aprendieron en sus cursos anteriores de Matemáticas.

d) ¿Es posible empatar en un lanzamiento? ¿Por qué?

Modifiquen el juego. Ahora, para ganar, en cada lanzamiento 2 monedas deben mostrar la cara elegida, y si las 3 monedas muestran esa misma cara, se considera empate.

e) ¿Con esta variación los jugadores siguen teniendo iguales probabilidades de ganar?

f) ¿Qué es más probable, empatar o no empatar?

Resuelvo y aprendo

Espacio muestral y escala de probabilidad

1. Analicen y resuelvan en equipos las siguientes situaciones.

a) En la kermés del día del estudiante en la secundaria Simón Bolívar se sortearán varios premios utilizando ruletas como las que se muestran en la figura 1.40. En las dos primeras, cada división ocupa la misma área; en la tercera ruleta, $\frac{1}{4}$ de círculo se rotuló con el número 2, $\frac{1}{8}$ con el 3 y $\frac{1}{16}$ con el 6; al resto se le asignó el 1.

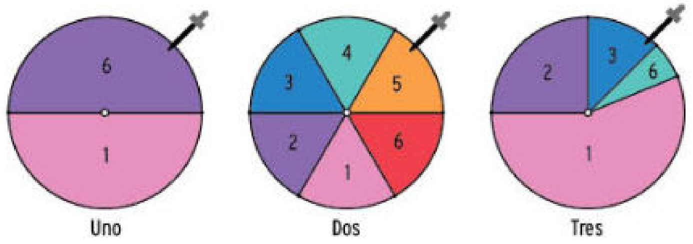


Fig. 1.40

- ¿Cuántos y cuáles resultados pueden obtenerse con cada ruleta? Represéntenlos de modo que los consideren todos.

El conjunto de todos los resultados que se pueden obtener en un experimento se llama *espacio muestral*, y es muy útil para analizar la probabilidad de que ocurra un evento.

- Si se hacen girar las ruletas, ¿en cuál será más probable que, al detenerse, la marca indique el área con el número 6?
- ¿Qué fracción o porcentaje del círculo corresponde al 6 en cada ruleta?
- ¿Cuál es la relación entre la probabilidad y la fracción o porcentaje del círculo que corresponde al 6 en cada ruleta?
- ¿Cómo debería ser una ruleta donde la probabilidad de obtener un 6 fuera igual a 1?
- ¿Puede existir una ruleta donde la probabilidad de obtener 6 fuera mayor que 1? ¿Por qué?
- ¿Cuál es la probabilidad de obtener 5 en la primera ruleta? ¿Por qué?
- ¿Cuál es la probabilidad de que en la primera ruleta el resultado sea 1?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que en la primera ruleta el resultado sea 1 o 6?

Integración

2. Respondan en grupo con la ayuda de su profesor.

a) ¿Qué significa que la probabilidad de que ocurra un evento sea igual a 0? ¿Y que tenga una probabilidad igual a 1? ______

b) La probabilidad de un evento $P(A)$ se cuantifica con un número entre ______ y ______.

Este hecho se conoce como *escala de probabilidad*.

c) La probabilidad de un evento se puede expresar en tres formas equivalentes:

______

Eventos y sus características

3. Analicen en equipos las siguientes situaciones.

a) Se tienen dos dados: uno azul y otro verde. El experimento consiste en lanzar los dados y observar y sumar los números de sus caras superiores. ¿Cuántos resultados posibles existen? Obtengan el espacio muestral completando la tabla.

Dado azul \ Dado verde	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

______

b) Sumen los números de ambas caras superiores y consideren los siguientes eventos:
Evento A: La suma es un número par.
Evento B: La suma es un número impar.

- ¿Estos eventos pueden ocurrir al mismo tiempo? ______
- Si del espacio muestral se eliminan todos los resultados que corresponden al evento A, ¿cómo es el resto del espacio muestral respecto al evento B? ______

c) Consideren los siguientes eventos:
Evento C: La suma es igual a 7.
Evento D: La suma es distinta de 7.

- ¿Ambos eventos pueden ocurrir al mismo tiempo? Expliquen su respuesta. ______

- ¿Cuál es la probabilidad del evento C, $P(C)$? ______
- ¿Cuál es la probabilidad del evento D, $P(D)$? ______
- ¿Cuál es la probabilidad de que al sumar las caras de los dos dados el resultado sea 7 o distinto de 7? ______
- ¿Al lanzar ambos dados y sumar sus caras superiores es seguro que el resultado sea 7 o distinto de 7? ______

d) Evento E: La suma es mayor que 8.
Evento F: La suma es menor que 8.

- ¿Los dos eventos pueden ocurrir al mismo tiempo? ¿Por qué? ______
- Si del espacio muestral se eliminan todos los resultados que corresponden al evento E, ¿cómo es el resto del espacio muestral respecto al evento F? ______
- ¿Cuál es la probabilidad del evento E, $P(E)$? ______
- ¿Cuál es la probabilidad del evento F, $P(F)$? ______
- ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar los dados y sumar sus caras superiores el resultado sea mayor o menor que 8? ______
- ¿Al lanzar ambos dados y sumar sus caras superiores es seguro que el resultado sea mayor o menor que 8? ¿Por qué? ______

e) Evento G: El dado azul cae en número par.
Evento H: El dado azul cae en número non.

- ¿Estos eventos pueden ocurrir al mismo tiempo? ______
- De acuerdo con el espacio muestral, ¿cuál es la probabilidad de que ocurra el evento G? ______
- De acuerdo con el espacio muestral, ¿cuál es la probabilidad de que ocurra el evento H? ______

Comparen sus respuestas con las de el resto del grupo, revísenlas y valídenlas con ayuda de su profesor.

Integración

4. Completen en grupo las siguientes frases con ayuda de su profesor.

a) Dos eventos que en conjunto completan ______________ y no pueden ocurrir de manera simultánea se llaman *eventos complementarios*.

- El valor numérico de la probabilidad de que ocurra uno de los eventos complementarios al realizar un experimento aleatorio en relación a su evento complementario es: ____________

b) Los eventos que no pueden ocurrir de manera simultánea al realizar un experimento se denominan *eventos mutuamente excluyentes*. Por ejemplo, ____________________

Eventos independientes

5. En equipos analicen las siguientes situaciones. Argumenten sus respuestas.

a) Si en 5 volados ha salido 4 veces "sol" y 1 vez "águila", ¿existe alguna ventaja si en el siguiente lanzamiento elegimos sol? Justifiquen su respuesta.

____

- ¿Cuál es la probabilidad de que también en esta ocasión caiga sol? Expresen el resultado como número decimal.

____

Fig. 1.41

b) En una bolsa oscura se guardan tres bolas: dos blancas y una roja.
- El primer experimento consiste en extraer una bola, registrar su color y regresarla a la bolsa.
- ¿Cuál es la probabilidad de sacar la bola roja en el primer intento? Expresen el resultado como fracción. ____________
- ¿Cuál es la probabilidad de sacar otra vez la bola roja en el segundo intento? Expresen el resultado como fracción. ____________
- En una variante, la bola sustraída no se regresa a la bolsa y se hacen dos extracciones. Para la variante del experimento:
  - ¿Cuál es la probabilidad de sacar la bola roja en el primer intento? Expresen el resultado como porcentaje. ____________
  - ¿Cual es la probabilidad de extraer la bola roja en el segundo intento? Consideren todas las posibilidades e indiquen las respuestas como porcentaje. ____________

____

- Supongan que en el primer intento salió la bola roja. ¿Cuál es la probabilidad de sacar la bola blanca en el segundo intento? ____________
- Ahora supongan que en la primera extracción se sacó la bola roja. ¿Cuál es la probabilidad de extraer la bola roja en el segundo intento? ____________

Integración

6. Completen en grupo la siguiente frase con la ayuda de su profesor.

a) Dos eventos se llaman *independientes* si, al ocurrir cualquiera de ellos, la probabilidad de que ocurra el segundo (al repetir el experimento) no se ve afectada. Por ejemplo, ____________

Consolido mis aprendizajes

1. Resuelvan en parejas el siguiente problema.

a) Toda la superficie de un cubo de madera de 3 cm por lado se pinta de color gris. Después se hacen 6 cortes para obtener 27 cubitos de 1 cm^3 cada uno. Todos los cubitos se introducen en una bolsa oscura y luego se extrae uno de ellos, se registra cuántas de sus caras están pintadas de gris y por último se regresa a la bolsa.

Fig. 1.42

- ¿Cuál es la probabilidad de que ocurra cada uno de los siguientes eventos?
  - Evento A: que al sacar un cubo tenga 3 caras pintadas: $P(A) =$
  - Evento B: que al sacar un cubo tenga 2 caras pintadas: $P(B) =$
  - Evento C: que al sacar un cubo tenga 1 cara pintada: $P(C) =$
  - Evento D: que al sacar un cubo no tenga ninguna cara pintada: $P(D) =$
- ¿Cuál es el evento más probable?
- ¿Es más probable que ocurra ese evento o que no ocurra?
- Escriban dos eventos que sean complementarios.
- Escriban dos eventos que sean mutuamente excluyentes.

Comparen sus respuestas y procedimientos con los de otros equipos y valídenlos en grupo con ayuda de su profesor.

¿Qué opinan los demás?

Inicio a partir de lo que sé

En parejas resuelvan lo siguiente.

Alba quiere iniciar un negocio de venta de tenis en el mercado de su colonia.

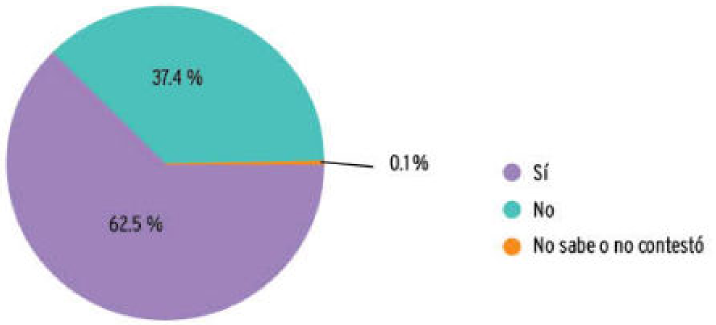
a) ¿Qué le recomendarías a Alba para que pueda saber cuáles son los modelos de tenis que más compran las personas que viven en su colonia y así tener mayores posibilidades de éxito en su negocio? ¿Por qué?

Resuelvo y aprendo

Identificación de la población en un estudio estadístico

1. En equipos respondan las preguntas a partir de las situaciones siguientes.

a) Los maestros de la escuela secundaria 23 han detectado una baja en el desempeño académico de sus alumnos, y algunos piensan que en parte se debe al uso excesivo de las redes sociales por parte de los alumnos. Para sustentar su hipótesis, los maestros revisaron la consulta que el Instituto Mexicano de la Juventud realizó a personas entre 12 y 29 años sobre si tenían una cuenta en redes sociales. La gráfica muestra los resultados de acuerdo con las respuestas.



Fuente: www.juridicas.unam.mx/invest/areas/opinion/envaj/pdf/11-redes.pdf

Fig. 1.43

- ¿A qué grupo de personas se le aplicó la encuesta?
- ¿Qué información se puede conocer a partir de la gráfica?
- ¿Esta información es representativa de los alumnos de la secundaria 23? Justifiquen su respuesta.

- ¿Consideran que los resultados de la encuesta demuestran que los alumnos de secundaria pasan mucho tiempo en redes sociales? Justifica tu respuesta.
- ¿Qué datos necesitarían para saber si la hipótesis de los maestros es correcta?
- Escriban una pregunta con la que se pueda conocer cuáles son las redes sociales más populares.

Comparen sus respuestas con las de otros equipos y con apoyo de su profesor verifiquen que sean correctas.

En una encuesta, la *población* es el grupo total de personas o cosas que se considera como objeto de estudio o del cual se obtiene información.

b) No siempre es posible conocer las características o el comportamiento de una población mediante una encuesta; por ejemplo, si se quiere saber cuántas veces un foco se enciende y apaga antes de fundirse, o la distancia que cubren en el salto de longitud un grupo de atletas. En estos casos es necesario realizar un *experimento estadístico*, es decir, un experimento para observar y medir las características deseadas.

- Escriban cuáles son las poblaciones en estudio de los dos ejemplos mencionados en el párrafo.
- ¿Cómo obtendrían los datos en ambos casos?
- ¿Qué tipo de medida de tendencia central será la más adecuada para resumir el número de veces que se pude encender y apagar un foco antes de fundirse?
- ¿Cuál será la medida más representativa para indicar la distancia que puede cubrir un grupo de atletas en el salto de longitud?

Integración

2. En grupo y con ayuda de su profesor realicen en su cuaderno lo que se pide.

a) Escriban cómo identificar la población de un **estudio estadístico**.

b) Expliquen cómo identificar cuándo es adecuado aplicar una encuesta o un experimento estadístico para obtener información en un estudio estadístico.

Estudio estadístico: es un proceso o método mediante el que se obtienen, organizan, representan y analizan datos para establecer conclusiones acerca de ellos.

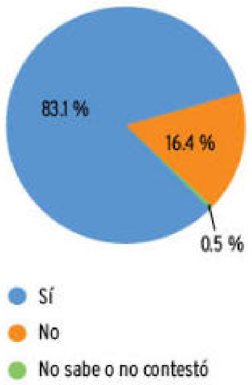


Fig. 1.44

Elegir una muestra

3. En equipos realicen lo que se indica.

a) En 2012 se llevó a cabo la Encuesta Nacional de Valores en Juventud 2012 para conocer las actitudes, opiniones y valores de la población joven de México. Para ello se entrevistó en sus viviendas a 5 000 personas entre 12 y 29 años. En la figura 1.44 se muestran los resultados a la pregunta: ¿Alguna vez intentaste o has intentado comenzar tu propio negocio?

- Si en 2012 en México había 36.2 millones de jóvenes entre 12 y 29 años, ¿qué porcentaje de la población se consultó para realizar la encuesta?

___

- A partir de esta respuesta, y teniendo en cuenta que se realizó una encuesta aleatoria, ¿los resultados se pueden considerar representativos de los habitantes de la República Mexicana de entre 12 y 29 años? Justifiquen su respuesta en su cuaderno.

Reflexionen. ¿Cuáles son las ventajas y desventajas de realizar una encuesta a toda la población en estudio en vez de encuestar a una fracción de ella?

4. En equipos contesten lo siguiente.

Muestra: conjunto representativo de la población en un estudio estadístico. El número de individuos de la muestra es menor que el de la población.

b) El Instituto de Cultura de la ciudad de Valparaíso realizó una encuesta a dos **muestras** de la población para conocer cuántos libros al año leen los habitantes mayores de 7 años.
Muestra 1: 2 000 personas en distintas bibliotecas y círculos de lectura.
Muestra 2: 450 personas en la calle en distintos puntos de la ciudad.

- ¿Cuál es la población del estudio?

___

- ¿Cuál muestra es representativa de la población en estudio? ¿Por qué?

___

___

Te invito a...

visitar la siguiente página electrónica www.edutics.com.mx/4c5 y diseñar una encuesta en línea sobre cuáles son los alimentos que consumen los adolescentes en la escuela. (Consulta: 17 de enero de 2019).

c) Una compañía de telecomunicaciones del estado de Veracruz eligió dos muestras para saber con qué frecuencia se conectan a internet, en promedio, jóvenes cuyas edades se encuentran entre 12 y 16 años.
Muestra A. 5 000 personas de 12 a 16 años en establecimientos de renta de computadoras del estado de Veracruz.
Muestra B. 1 000 personas con edades entre los 12 y 16 años en la vía pública en 25 municipios del estado de Veracruz.

- ¿Cuál de las dos muestras es más representativa de la población en estudio? ¿Por qué? ___

___

- Si la muestra estuviera formada sólo por personas con acceso a internet, ¿sería representativa de toda la población? ¿Por qué?

___

___

d) En una estación de radio se quiere saber quién es el cantante de moda entre los adolescentes. ¿Cuál de las siguientes muestras es más representativa de la población en estudio?
200 adolescentes que llamaron libremente a la estación de radio.
200 adolescentes entrevistados a la salida de varias secundarias.

e) En equipos analicen las siguientes maneras de elegir una muestra. Señalen si en general éstas son representativas de la población en estudio o sólo en algunos casos. Justifiquen sus respuestas en sus cuadernos e incluyan ejemplos.
Una muestra está formada sólo por voluntarios.
Los individuos de la muestra se eligen al azar.

Cuando una muestra conserva las mismas características de la población en estudio se llama *muestra representativa*.

Comparen sus respuestas con las de otros equipos, discútanlas y con apoyo de su profesor escriban sus conclusiones.

Integración

5. En grupo, con ayuda de su profesor, elijan un estudio estadístico sobre un tema que les interese, y con base en él escriban un procedimiento para elegir la muestra representativa.

___

___

___

___

¿Qué actividad realizas en tu tiempo libre?	
Reunirse con amigos	512
Ver televisión	283
Hacer deporte	293
Escuchar música	241
Otra	691

Fig. 1.45

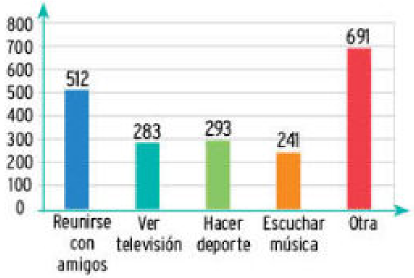


Fig. 1.46

Fig. 1.47

Fig. 1.48

Presentar los resultados

6. En equipos resuelvan en su cuaderno las siguientes situaciones.

a) Para conocer las actividades que realizan los alumnos en su tiempo libre, los maestros de la secundaria 23 decidieron realizar una encuesta. Los resultados presentados en las figuras 1.45, 1.46, 1.47 y 1.48 muestran las respuestas a la pregunta: "¿Qué actividad realizas con mayor frecuencia en tu tiempo libre?".

- ¿Cuáles de las presentaciones muestran prácticamente la misma información?
- ¿Con cuál de las presentaciones no es posible saber el total de individuos que conformaron la muestra? ¿Por qué?
- ¿Con cuál presentación es más fácil comparar la información? ¿Por qué?

b) Supongamos que se desea llevar un registro del valor del oro en los últimos meses. ¿Cuál de las presentaciones sería más conveniente para mostrar sus fluctuaciones? ¿Por qué?

Consolido mis aprendizajes

1. En parejas retomen el problema inicial y respondan en su cuaderno.

a) ¿Qué tipo de estudio estadístico es útil para que Alba tenga éxito en su negocio?
b) ¿Cuál es la población en estudio?
c) ¿El estudio estadístico se podría realizar a toda la población o sólo a una muestra? Si fuera una muestra, ¿cómo la elegirían para que fuera representativa? Argumenten su respuesta.
d) ¿Qué representación sería la más adecuada para presentar los resultados? Justifiquen su respuesta.

2. Elijan uno de los siguientes temas para realizar una encuesta o sugieran algún otro que les parezca más interesante.

a) ¿Cuál es el grado de estrés de las personas?
b) ¿Cuánto tiempo dedican los estudiantes de tu escuela a jugar videojuegos? ¿Esto afecta su nivel de aprovechamiento escolar?
c) ¿Cuál es el grado de acoso escolar o *bullying* en tu escuela?
d) Otro tema: ______________________________

- Anota cuál es la población en estudio para realizar la encuesta.
- Apliquen la encuesta en equipos y registren los datos en su cuaderno.
- ¿Qué tipo de representación gráfica es la más adecuada para presentar los resultados de la encuesta?
- Obtengan conclusiones, escríbanlas en su cuaderno y preséntelas a sus compañeros.
- Propongan acciones a seguir con base en sus resultados y conclusiones.

3. Dividan el grupo en equipos; la mitad elegirá uno de los siguientes experimentos y la mitad el otro.

a) Número de palabras por minuto que lee una persona en voz alta.
b) Cantidad de objetos o nombres que pueden memorizar tus compañeros en determinado tiempo.

- Indiquen la población en estudio en cada caso y decidan el tamaño de la muestra.
- ¿Cuántas veces deben repetir los experimentos para obtener los datos suficientes y que su respuesta sea confiable?

En grupo comparen sus procedimientos y resultados. Discutan cuáles les parecen más acertados y expliquen su elección.

Habilidades digitales

Congruencia y semejanza de triángulos

En esta sección aprovecharemos las ventajas que brindan los *software* de matemáticas que combinan geometría, álgebra y cálculo. En internet puedes obtener uno gratuito y de libre distribución, pregunta a tu maestro cuál es el más adecuado.

Te invito a...

entrar a la página www.edutics.mx/4hC donde podrás obtener un software gratuito de geometría, álgebra y cálculo. (Consulta: 17 de enero de 2019).

1. Abre el programa (figura 1), da clic en el botón de *Vista gráfica* y desactiva, si es necesario, las opciones *Ejes* y *Cuadrícula* (las herramientas de cada programa varían, incluso en las versiones del mismo programa, busca las que sean análogas a las que aquí mostramos).

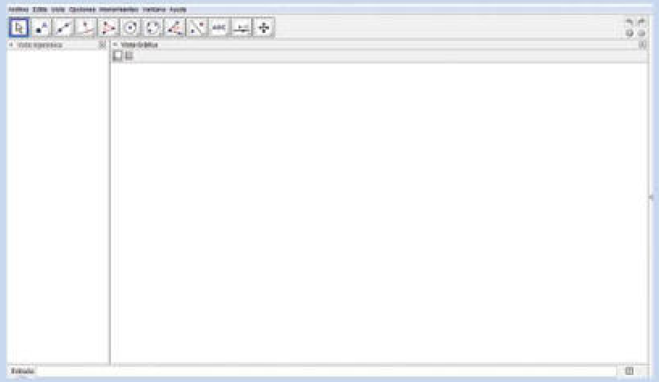


Fig. 1

2. Haz clic en el triángulo inferior del icono y selecciona que corresponde con la opción *Recta que pasa por Dos Puntos* (figura 2). Da clic dos veces sobre el espacio de trabajo para elegir dos puntos, *A* y *B*, por los que pasará la recta.

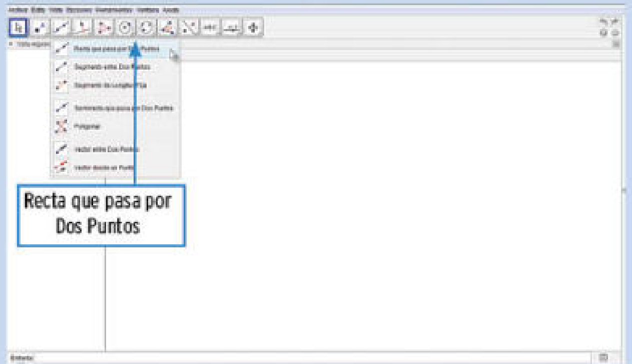


Fig. 2

3. Haz clic sobre el triángulo inferior del ícono, selecciona la opción para dibujar una recta paralela a la primera, colócala en un punto *C* no colineal con la recta $\overleftrightarrow{AB}$.

4. Con la herramienta dibuja una recta que pase por los puntos *B* y *C*, y otra que sea paralela a esta última y que pase por el punto *A*; da clic sobre el ícono , selecciona la opción *Nuevo Punto* y coloca en el punto *D* en la intersección de las rectas paralelas a $\overleftrightarrow{AB}$ y a $\overleftrightarrow{BC}$. Así obtendrás un paralelogramo. Haz clic sobre el triángulo inferior del ícono , selecciona la opción *Segmento entre Dos Puntos* y dibuja las diagonales del paralelogramo. Coloca el punto *E* sobre las intersección de las diagonales (figura 3).

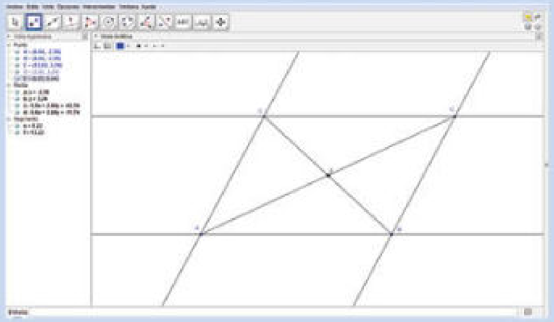


Fig. 3

5. Da clic en el ícono y selecciona la herramienta *Polígono*, traza uno de los triángulos formados por el paralelogramo y sus diagonales. Después da clic sobre el ícono y selecciona la opción *Deslizador*. A continuación haz clic en la parte inferior del área de trabajo; aparecerá una ventana con las opciones del *Deslizador*. Selecciona el campo *Ángulo* y escribe un nombre para el ángulo; en el campo *Intervalo* especifica un mínimo de 0° y un máximo de 180°, en el incremento escribe 1° y oprime el botón *Aplica*. En el campo *Entrada* escribe: *Rota[nombre_del_polígono, nombre_del_angulo, E]*, para conocer el nombre del polígono coloca el cursor sobre el polígono que trazaste, el nombre del ángulo es el que habías elegido, y presiona la tecla *Entrar*.
6. Traza otro triángulo que sea adyacente con el primero en forma análoga a como se trazó el primero, y repite las instrucciones anteriores; mueve los puntos sobre los deslizadores de los ángulos y observa lo que ocurre (figura 4).

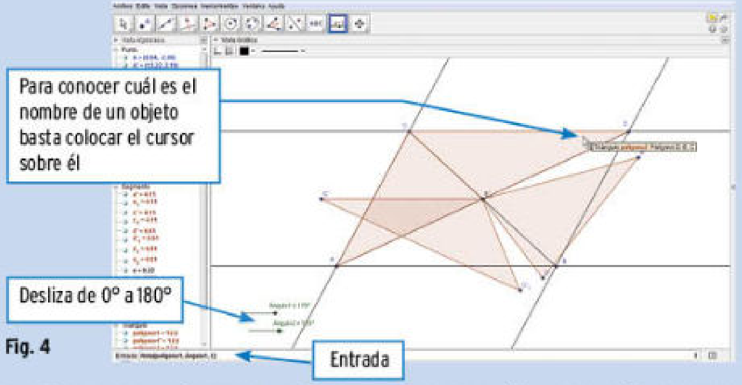


Fig. 4

a) ¿Cómo son los triángulos *ADC*, *AED* y *AEB* en comparación con los triángulos *CDB*, *CEB* y *DEC*, respectivamente?

____

b) ¿Cuál criterio de congruencia usaste para saber si estos triángulos son o no congruentes?

____

Para una segunda actividad con el programa de dibujo abre una nueva ventana a partir del menú *Archivo*.

7. Da clic en el triángulo inferior del ícono , selecciona la opción y traza una semicircunferencia. Luego, con la herramienta *Polígono*, traza un triángulo inscrito a la semicircunferencia (figura 5). Traza una recta perpendicular a la hipotenusa del triángulo que pase por el vértice opuesto. Haz clic sobre el triángulo inferior del icono , selecciona la opción *Intersección de Dos Objetos* y añade un punto *D* en la intersección de la hipotenusa y la recta perpendicular.

   Con la herramienta *Polígono* traza los triángulos que se forman al intersecar el primer triángulo con la recta perpendicular a la hipotenusa. Da clic en el ícono , selecciona la herramienta *Ángulo* y señala los ángulos interiores de ambos triángulos (figura 5).
8. Abre el menú *Vista* y selecciona la opción *Hoja de Cálculo*. Identifica sobre la *Vista Algebraica* el nombre de los catetos de los tres triángulos y su magnitud. Para ello da clic sobre el cateto que desees identificar. De acuerdo con el nombre que los representa en la *Vista Algebraica* escribe en las celdas de la hoja de cálculo los siguientes cocientes: $\frac{AC}{CB}, \frac{AD}{CD}, \frac{CD}{BD}, \frac{AB}{AC}, \frac{AC}{AD}, \frac{BC}{CD}$ (figura 5).

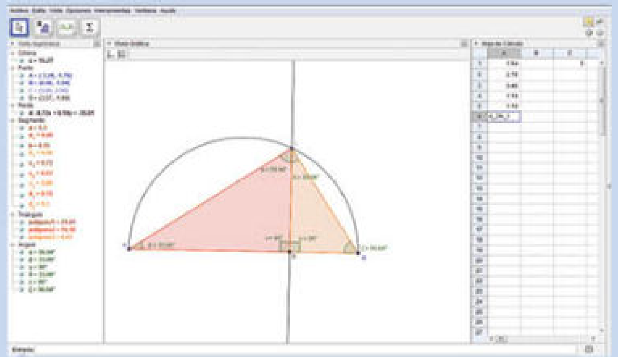


Fig. 5

9. Haz clic en el ícono y selecciona la opción *Elige y Mueve*. Mueve el punto *C*, que corresponde al vértice del triángulo que no está en los extremos de la semicircunferencia y observa qué ocurre con los datos en la *Vista Algebraica y la Hoja De Cálculo*.
   a) ¿Cómo son los dos triángulos que se forman al intersecar cualquier triángulo rectángulo con la línea recta que pasa por la altura respecto a su hipotenusa?

   ____

   b) ¿Con cuál o cuáles criterios de semejanza sabes si el triángulo original es o no semejante a los triángulos formados a partir de la intersección de la recta?

   ____

Ponte a prueba PISA

1. A las diez de la mañana la sombra de un árbol mide 2.6 m; a la misma hora, un palo que mide 1.4 m de largo clavado verticalmente tiene una sombra de 0.84 m.

a) Explica si los triángulos que se forman entre el árbol y su sombra y entre el palo y su sombra son semejantes.

____

b) ¿Cuánto mide la altura del árbol?

____

2. El tercer grado de una escuela secundaria está formado por tres grupos: A, B y C. Se sabe que de los 35 alumnos del grupo A, 10 hablan inglés; 12 de los 30 alumnos del grupo B también lo hablan, y en el grupo C, de los 28 escolares que forman el grupo, 15 hablan ese idioma.

a) Si en una urna se coloca una tarjeta con el nombre de cada uno de los estudiantes de los tres grupos y se toma uno al azar, se lee y se regresa a la urna, ¿cuál es la probabilidad de que la tarjeta seleccionada sea la del nombre de un alumno que sepa inglés?

____

- Y, ¿cuál es la probabilidad de que sea el nombre de un alumno que no hable inglés? ______________
- Si al sacar una tarjeta ésta corresponde a la de un alumno que sabe inglés, ¿en la segunda extracción cambiaría la probabilidad de que la tarjeta seleccionada sea la de un alumno que también hable inglés? Explica tu respuesta.

____

____

____

- ¿Cuál es la probabilidad de que en la primera extracción una tarjeta tenga el nombre de un alumno del grupo A? ______________________________
- Si la tarjeta siempre se regresa a la urna, ¿cuál es la probabilidad de que al sacar otra el nombre sea el de un alumno del grupo B? ______________________________

b) Si ahora, después de sacar una tarjeta de un alumno que no sabe inglés, no se regresa a la urna, ¿cambiará la probabilidad de que en la segunda extracción se saque el nombre de un alumno que sí sabe inglés con respecto a la situación anterior? ¿Por qué?

____

____

____

3. Para obtener el campeonato en un torneo de tenis de mesa, cada participante debe enfrentarse al resto; es decir, todos los participantes deben jugar una partida contra todos los demás. De esta forma, el número de encuentros depende del número de participantes como se puede observar en la siguiente tabla:

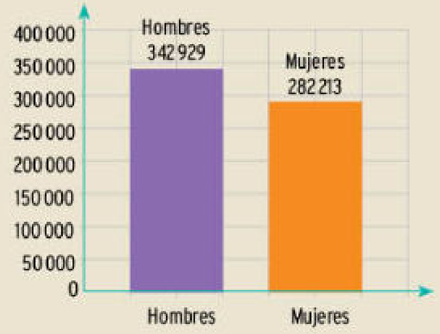
Participantes	1	2	3	4	5	6
Número de encuentros	0	1	3	6	10	15

a) Subraya el número de partidas que se jugarían si participan en el torneo 20 jugadores.

- 40 juegos
- 210 juegos
- 190 juegos
- 171 juegos

4. La gráfica siguiente presenta información sobre la deserción escolar en el país.

Desertores totales en la educación media superior en México Ciclo escolar 2010 - 2011



Fuente: SEMS con información de las Estadísticas del Sistema Educativo Nacional, DGP, SEP. **Fig. 1**

a) ¿Qué periodo abarca la información? ______________________________

b) Si la información se obtuvo mediante una encuesta, ¿qué pregunta se pudo plantear para obtenerla? ______

____

c) ¿A qué grupo de personas se aplicó la encuesta? ______________________________

d) Si en el ciclo escolar 2010-2011 en el nivel medio superior se inscribieron 4 187 528 alumnos, ¿cuál fue el porcentaje de deserción para en ciclo?

e) La proporción entre el número de hombres que desertaron en relación con el número de mujeres fue de 1.22. ¿Cómo se obtiene esa proporción y cuál es su significado? ______________________________

____

____

Ponte a prueba ENLACE

1. El producto de dos números consecutivos es 870. ¿Cuáles son esos números?

a) 29 y 30
b) 30 y 31
c) −30 y −29
d) Las respuestas a) y c) son correctas.

2. ¿Qué opción expresa una propiedad de las figuras geométricas semejantes?

a) Sus lados correspondientes son congruentes y sus ángulos distintos, pero proporcionales.
b) Sus lados correspondientes son proporcionales y sus ángulos distintos, pero proporcionales.
c) Sus ángulos correspondientes son iguales.
d) La suma de los ángulos de una figura es proporcional a la suma de los ángulos de la otra.

3. Las medidas de los lados de un triángulo son 7 cm, 9 cm y 15 cm. Si al construir un triángulo semejante al anterior se traza un lado de 7.7 cm y otro de 16.5 cm, ¿cuál es la medida del tercer lado?

a) 9.7 cm
b) 9.9 cm
c) 15.5 cm
d) 10.5 cm

4. ¿A cuál de las siguientes tablas de datos le corresponde la gráfica?

a)

x	y
−2	0
−1	1
0	2
1	3
2	4

b)

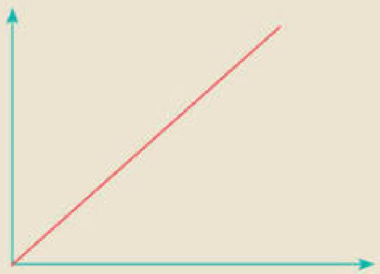
x	y
0	0
1	3
2	6
3	9
4	12

c)

x	y
0	2
1	2
2	2
3	2
4	2

d)

x	y
0	1
1	2
2	3
3	4
4	5



5. Si dos triángulos rectángulos tienen las medidas de dos de sus lados correspondientes iguales, entonces son:

a) congruentes.
b) proporcionales.
c) semejantes.
d) isósceles.

6. Los datos de una encuesta muestran la frecuencia de edades por sexo en una comunidad. ¿Cuál de los siguientes tipos de gráficas es más conveniente para representarlos?

a) De sectores.
b) Circular.
c) De barras.
d) De caja-brazos.

Ahora sé

Autoevaluación

Marca con una ✓ la opción que demuestre tus alcances correspondientes a los aprendizajes esperados y responde la pregunta.

Contenido	¿Logré el aprendizaje?		¿Cómo puedo mejorar?
	Sí	No	
Resuelvo problemas que implican el uso de ecuaciones cuadráticas sencillas, utilizando procedimientos personales u operaciones inversas.			
Construyo figuras congruentes o semejantes (triángulos, cuadrados y rectángulos) y analizo sus propiedades.			
Explico los criterios de congruencia y semejanza de triángulos a partir de construcciones con información determinada.			
Analizo representaciones (gráficas, tabulares y algebraicas) que corresponden a una misma situación. Identifico las que corresponden a una relación de proporcionalidad.			
Represento tabular y algebraicamente relaciones de variación cuadrática, identificadas en diferentes situaciones y fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas.			
Conozco la escala de la probabilidad. Analizo las características de eventos complementarios y eventos mutuamente excluyentes e independientes.			
Diseño una encuesta o un experimento e identifico la población en estudio. Discuto sobre las formas de elegir el muestreo. Obtengo los datos de una muestra y busco herramientas convenientes para su presentación.			

Al terminar revisa la tabla con tu profesor. Después, en grupo y con el apoyo de su profesor, elaboren una estrategia de trabajo para que mejoren su desempeño.

<table>
<tr><th>Eje</th><th>Contenido</th><th>Aprendizajes esperados</th></tr>
<tr><td>Sentido numérico y pensamiento algebraico</td><td>Patrones y ecuaciones
• Uso de ecuaciones cuadráticas para modelar situaciones y resolverlas usando la factorización.</td><td rowspan="4">• Explica el tipo de transformación (reflexión, rotación o traslación) que se aplica a la figura para obtener la figura transformada. Identifica las propiedades que se conservan.
• Resuelve problemas que implican el uso del teorema de Pitágoras.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Forma, espacio y medida</td><td>Figuras y cuerpos
• Análisis de las propiedades de la rotación y de la traslación de figuras.
• Construcción de diseños que combinan la simetría axial y central, la rotación y la traslación de figuras.</td></tr>
<tr><td>Medida
• Análisis de las relaciones entre las áreas de los cuadrados que se construyen sobre los lados de un triángulo rectángulo.
• Explicitación y uso del teorema de Pitágoras.</td></tr>
<tr><td>Manejo de la información</td><td>Nociones de probabilidad
• Cálculo de la probabilidad de ocurrencia de dos eventos mutuamente excluyentes y de eventos complementarios (regla de la suma).</td></tr>
</table>

Para algunos triángulos las medidas de las áreas de los cuadrados que se construyen sobre sus lados cumplen ciertas relaciones que tienen diversas aplicaciones en la vida cotidiana. La imagen de la derecha muestra la relación que se cumple entre los cuadrados que se construyen sobre un triángulo rectángulo.

Vamos por partes

Inicio a partir de lo que sé

En parejas resuelvan el problema.

Una cancha de voleibol tiene las dimensiones que muestra la figura 2.1.

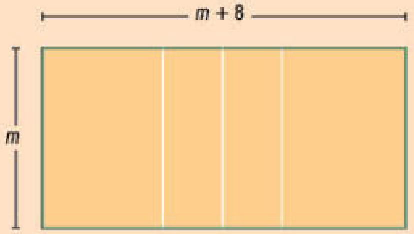


Fig. 2.1

a) Si se sabe que el área de la cancha es de 128 m2, ¿qué ecuación cuadrática representa el área de la cancha?

b) ¿Cuánto miden los lados de la cancha?

Resuelvo y aprendo

Situaciones que implican ecuaciones cuadráticas

1. En equipos resuelvan el siguiente problema.

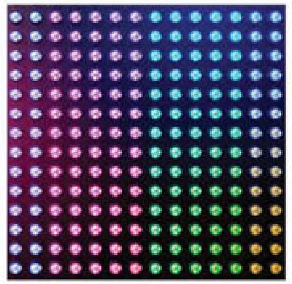


Fig. 2.2

a) El área de un panel cuadrado de luces de LED para anuncios publicitarios, como el de la figura 2.2, es numéricamente igual a 16 veces la medida de uno de sus lados, que está dada en pulgadas.

- Escriban una ecuación cuadrática que represente la situación anterior.

- ¿Cuánto mide por lado el panel?

- Verifiquen el resultado y discutan con sus compañeros su procedimiento para encontrar la medida del lado del panel. Escríbanlo.

- Reflexionen. ¿Algún otro número satisface la ecuación cuadrática que representa la situación? ¿Cuál? ¿Ese número también es solución del problema?

b) Claudia es 3 años mayor que su hermano Manuel y el producto de sus edades es 12 veces la edad de Manuel.

- Escriban una ecuación que represente esta situación.

- De las siguientes ecuaciones cuadráticas subrayen la o las que correspondan con esta situación.

$m^2 + 3 - 12m = 0$ $\quad$ $m^2 + 3 - 12 = 0$

$m^2 - 9m = 0$ $\quad$ $m^2 + 3m + 12m = 0$

- Escriban la o las ecuaciones cuadráticas anteriores que representan la situación de forma que el miembro izquierdo de la ecuación esté factorizado, es decir, expresen ese polinomio como el producto de un monomio por un binomio.

- ¿Cuál o cuáles números satisfacen esta o estas ecuaciones cuadráticas?

- ¿Cuáles son las edades de Claudia y Manuel?

- Reflexionen. ¿Algún otro número satisface la ecuación cuadrática que representa la situación? Si es así, ¿es una respuesta válida para esta situación? Justifiquen su respuesta.

Verifiquen su respuesta y comenten con otro equipo cómo encontraron las edades de Claudia y Manuel.

c) En el triángulo que se muestra en la figura 2.3, el doble de su área menos 4 veces la medida de su base es igual a cero.

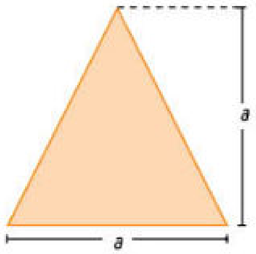


Fig. 2.3

- Anoten una expresión algebraica para representar el área de la figura a partir de las literales que representan sus dimensiones.

- Escriban una ecuación cuadrática que represente la situación problemática.

- Anoten esa ecuación cuadrática como producto de un monomio por un binomio.

- ¿Cuál o cuáles números satisfacen la ecuación cuadrática?

- ¿Cuánto miden la base y la altura del triángulo?

Escriban, en su cuaderno, su procedimiento para encontrar las medidas del triángulo y valídenlo en grupo con ayuda de su profesor.

2. En equipos resuelvan lo siguiente.

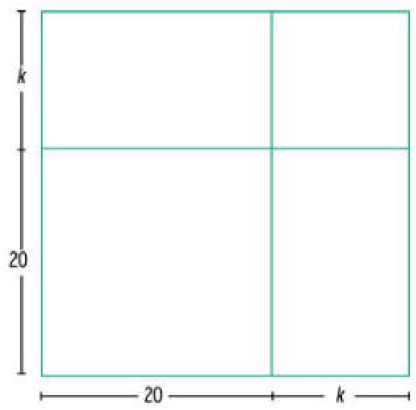


Fig. 2.4

a) La figura 2.4 representa un terreno de forma cuadrada. El área del cuadrado grande la ocupa la casa, los rectángulos corresponden a los jardines y el cuadrado pequeño representa el patio de servicio; las unidades están en metros.

- Escriban una expresión algebraica que represente el área del terreno en términos de las medidas de los lados.
- Si una porción de terreno, que equivale a $64k$, se debe donar para uso peatonal y de pavimentación, el área restante sería de 256 m². ¿Qué ecuación cuadrática corresponde a esa situación?
- Encuentren una ecuación equivalente a la ecuación anterior donde uno de sus miembros sea cero.
- Con ayuda de su profesor, factoricen en dos binomios el miembro de la ecuación que es distinto de cero. Tomen en cuenta que un polinomio de tres términos, es decir, un trinomio puede factorizarse en dos binomios.
- Si damos un valor a la literal k, a cada binomio corresponde una cantidad fija. ¿Cómo deben ser esas cantidades para que su producto sea cero?
- Por tanto, ¿qué valor debe tener k para que la igualdad se cumpla?
- ¿Cuáles son las medidas del terreno original?
- Compartan con el grupo su procedimiento para resolver la situación problemática y valídenlo con ayuda de su profesor.

Comparen sus respuestas con las de otros equipos y verifiquen que las soluciones cumplan con las condiciones iniciales. Corrijan sus respuestas si es necesario.

b) El monitor de la computadora de Marisol tiene 7 pulgadas más de largo que de ancho, como muestra la figura 2.5.

Fig. 2.5

- Escriban una ecuación cuadrática que represente el área del monitor.
- Encuentren una ecuación equivalente a la anterior de modo que uno de sus miembros sea un trinomio y el otro, cero.
- Con ayuda de su profesor factoricen el trinomio en dos binomios.
- Propongan dos números cuya suma sea igual al coeficiente del segundo término del trinomio y, su producto, igual al término independiente del trinomio (consideren los signos de los coeficientes).
- ¿Qué relación observan entre los números que encontraron y los términos independientes de los binomios?
- Expliquen cómo podrían emplear este procedimiento para factorizar cualquier trinomio.
- Retomen los binomios en los que factorizaron el trinomio. ¿Qué condición o condiciones deben cumplir para que su producto sea igual a cero?
- ¿Cuáles son los números que satisfacen la ecuación? ____________
- ¿Qué soluciones son válidas para la situación? ¿Por qué?
- ¿Cuáles son las medidas del monitor? ____________

Verifiquen que la solución cumpla con las condiciones de la situación original.

La resolución de una ecuación cuadrática por factorización se basa en la propiedad del **producto cero**.

Te invito a...

visitar la dirección electrónica www.edutics.mx/Zio e ingresar a Matemáticas 3, resolver las actividades 15 y 16, así como las situaciones planteadas. Compara tus procedimientos con los de tus compañeros y con ayuda del profesor validen sus respuestas. (Consulta: 21 de enero de 2019).

Propiedad del producto cero: si el producto de dos números es cero, entonces al menos uno de ellos debe ser cero.

c) El área total de la figura 2.6 es de 43 cm^2.
- Escriban una ecuación que represente el área de la figura considerando los cuadriláteros que la forman.

____

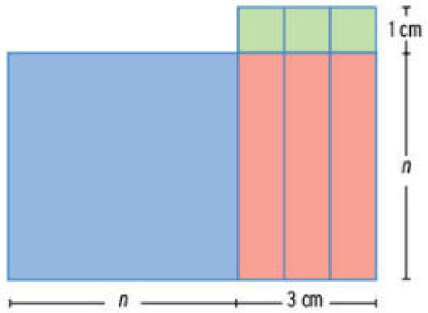


Fig. 2.6

- Reescriban la ecuación de manera que puedan factorizarla como lo hicieron en los casos anteriores. _______________
- ¿Qué números son soluciones de la ecuación? _______________
- Verifiquen que sus resultados cumplan con la condición de igualdad en la primera expresión de la ecuación.
- ¿Cuántos centímetros mide cada lado del cuadrado grande?

____

- ¿Es posible construir una figura formada por cuadriláteros cuya área esté asociada a la ecuación $(n + 3)(n + 3) = 0$? Si su respuesta es afirmativa, trácenla en su cuaderno, o en caso contrario escriban por qué no es posible construirla.

Comparen sus resultados y procedimientos con otro equipo y verifiquen que sean correctos. Señalen las semejanzas y diferencias entre los procedimientos.

d) En la figura 2.7 se muestran las medidas de una fotografía y su marco. El área que ocupan ambos es de 320 cm^2. Encuentren la medida del ancho del marco mediante el planteamiento de ecuaciones cuadráticas y su solución mediante factorización.
- Describan su procedimiento.

____
____
____
____
____

Fig. 2.7

Integración

3. En grupo y con ayuda de su profesor, completen los siguientes enunciados que describen un procedimiento para resolver situaciones que se modelan con una ecuación cuadrática que, a su vez, se puede resolver por medio de una factorización.
   - Se escribe _______________________ que represente la situación.
   - Se escribe una ecuación cuadrática equivalente en la que uno de sus miembros sea igual a _______________.
   - Se _______________ la ecuación cuadrática.
   - Se iguala a cero cada uno de _______________ para encontrar el valor de la incógnita.

Consolido mis aprendizajes

1. Retomen la actividad inicial y en parejas respondan lo siguiente. Al finalizar comparen sus respuestas y procedimientos con otras parejas y valídenlos en grupo con apoyo de su profesor.

   a) En la figura 2.8 se muestra el croquis de una cancha de voleibol (color anaranjado) y la zona libre (color verde). En la práctica, el juego de voleibol, además de la superficie de la cancha, también se desarrolla en la zona libre, a condición de que el balón no toque el suelo. Si el ancho de la zona libre mide lo mismo vertical y horizontalmente y su área es de 180 m^2, ¿cuánto mide de ancho?

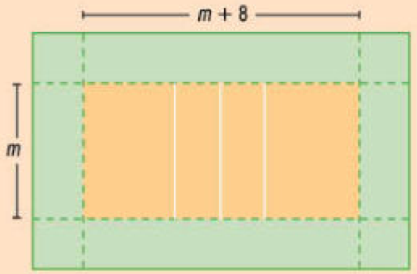


Fig. 2.8

2. En parejas resuelvan las actividades.

   a) El largo de una habitación con forma rectangular es 4 metros mayor que su ancho. Si el área de la habitación es numéricamente igual a su perímetro más 92, ¿cuáles son las dimensiones de la habitación?

   b) La base menor de un trapecio mide 4 cm menos que su base mayor, y la altura, 3 cm menos que la base mayor Si el área total del trapecio es de 30 cm^2, ¿cuáles son las dimensiones de esta figura geométrica?

Fig. 2.9

   c) La guía de usuario de un automóvil indica que la distancia de seguridad recomendada entre dos automóviles en movimiento depende de la rapidez a la que se viaja y está dada por la siguiente ecuación: $v^2 + 16v = 20d$, donde v es la rapidez a la que viajan los automóviles, en metros por segundo, y d es la distancia de separación, en metros. Si la distancia de separación entre dos automóviles, d, es de 48 metros, ¿cuál es la mayor rapidez a la que pueden desplazarse para viajar con seguridad de acuerdo con la guía?

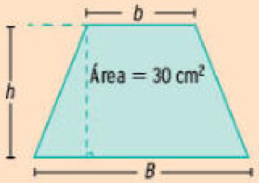


Fig. 2.10

   d) Propongan una situación que se pueda representar por medio de una ecuación cuadrática y que, además, se pueda resolver mediante una factorización. Escriban la situación en su cuaderno y resuélvanla. Después, también en su cuaderno, escriban las condiciones que debe cumplir una ecuación cuadrática para que se puedan encontrar sus soluciones mediante una factorización.

Comparen sus respuestas con otra pareja. ¿Las soluciones de las ecuaciones cuadráticas que obtuvieron son iguales? Si no es así, ¿en dónde estuvo el error?

Girar y deslizar

Inicio a partir de lo que sé

En parejas resuelvan el siguiente problema.

Fernando estudia el tercer grado de secundaria y es aficionado a la Astronomía, por lo que le encanta observar las estrellas y ha aprendido a reconocer algunas de ellas. Para ubicarlas, primero localiza el norte y luego mira hacia la estrella Polar para tomarla como referencia.

Una noche de diciembre, mientras observaba el cielo a las nueve de la noche, hizo un esquema de algunas de las estrellas más brillantes cercanas al cinturón de Orión, que es uno de los nombres que reciben tres famosas estrellas alineadas, también conocidas como las tres Marías o los tres Reyes Magos. El esquema de Fernando se muestra en amarillo a la izquierda de la imagen.

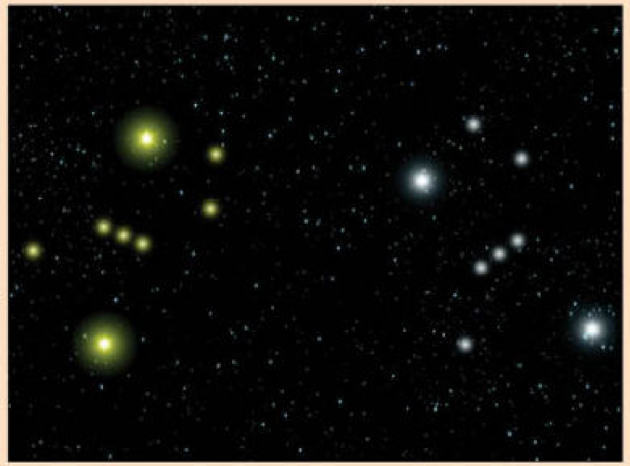


Fig. 2.11

Más tarde, a la una de la mañana, en el mismo esquema volvió a dibujar las estrellas pero en su nueva posición, como se muestra a la derecha, en blanco.

a) Formen una figura uniendo con segmentos de recta las estrellas que dibujó Fernando a las nueve de la noche, y formen otra figura uniendo en el mismo orden las de la una de la mañana. ¿Cómo son las figuras entre sí?

b) ¿Cuál es la trayectoria aparente del recorrido de las estrellas entre las nueve de la noche y la una de la mañana? ¿Qué forma tiene esa trayectoria?

c) Ubiquen en dónde se localizarían las estrellas a las 11 de la noche.

Resuelvo y aprendo

Propiedades de la traslación de figuras

1. En equipo resuelvan los siguientes problemas.

a) Sandra y sus amigos presentarán una obra de teatro y necesitan hacer un escenario con muchas estrellas para representar el cielo nocturno en el telón de fondo. La estrella verde de la figura 2.12 fue la base para hacer las demás estrellas, por lo que reprodujeron copias idénticas en diferentes partes del fondo del escenario.

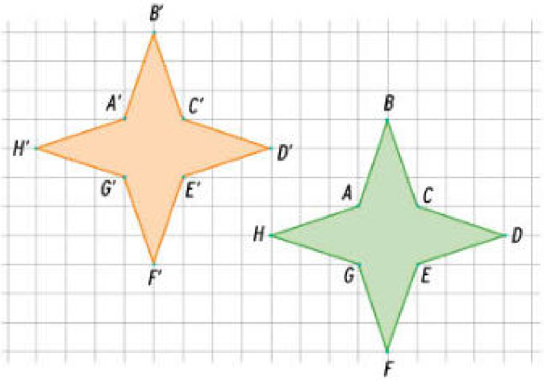


Fig. 2.12

- En una hoja de papel de reúso tracen y recorten una estrella idéntica a la verde. Colóquenla sobre la de la imagen y, sin despegarla del papel, muévanla en la forma más directa posible para hacerla coincidir con la estrella anaranjada.
- Describan la trayectoria que siguió la estrella recortada e indiquen la distancia que se movió. Consideren los cuadritos de la retícula como unidad de medida.

____

____

- ¿Cuál fue el desplazamiento de cada vértice de la estrella para llegar al vértice correspondiente en la estrella anaranjada?

____

Al desplazamiento en línea recta de una figura para obtener otra se le conoce como *directriz*, y se representa mediante una flecha que indica la dirección y magnitud del desplazamiento.

- En una hoja de cuadros chicos reproduzcan las estrellas de la figura 2.12 y, a partir de la estrella anaranjada, tracen otra desplazando la estrella que recortaron. Consideren a la estrella anaranjada como punto de partida y sigan el desplazamiento que mencionaron en la pregunta anterior. ¿En qué posición se localizaría? Tracen la directriz correspondiente.

____

- Si continuaran copiando estrellas con esta técnica y cada vez repitieran el movimiento desde la estrella anterior, ¿cómo quedarían acomodadas?

____

- Si ahora el punto de partida para el movimiento de la estrella recortada fuera la estrella anaranjada y quisieran trasladarla a la posición de la estrella verde, ¿cuál sería la trayectoria del movimiento?

____

- ¿Cuál sería la diferencia en el desplazamiento de la estrella recortada al trasladarla de la posición de la estrella verde a la anaranjada con respecto al desplazamiento de la estrella anaranjada a la verde?

____

- ¿Cómo son entre sí, las estrellas verde y anaranjada? _______________
- ¿Qué datos necesitan para verificar su respuesta? _______________

____

- Calculen el perímetro de la estrella verde y el de la estrella anaranjada. ¿Cómo son los perímetros entre sí? ______
- Calculen el área de ambas estrellas y compárenlas, ¿qué observan? ______
- Midan los ángulos internos de ambas figuras. ¿Cómo son entre sí los ángulos correspondientes? ______

b) El movimiento que acaban de realizar y analizar con las estrellas se conoce como *traslación* y, aunque se puede lograr con el recorte y movimiento de figuras en el plano, también se obtiene mediante el trazo de figuras en el plano.

- En la figura 2.12 unan con un segmento de recta cada vértice de la estrella verde con el vértice correspondiente de la estrella anaranjada. Midan los segmentos, analícenlos y describan qué tienen en común. ______
- En la hoja cuadriculada que usaron en la página anterior, tracen por traslación otra estrella, pero a partir de segmentos auxiliares, como los que trazaron para unir los vértices de las estrellas.

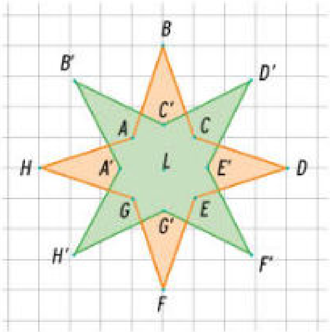
Observen que si sólo hubieran construido los segmentos auxiliares con las características que observaron en el inciso anterior sin la estrella anaranjada, al unir los puntos en donde terminaron los segmentos auxiliares, hubieran construido la estrella anaranjada. Observen también que cada segmento auxiliar corresponde con la *directriz* de traslación.

Integración

2. En grupo y con ayuda de su profesor describan en su cuaderno qué es una *traslación* y cuáles son sus propiedades.

Rotación de figuras

Fig. 2.13



3. En equipos realicen las siguientes actividades y respondan.

a) Cuando dibujaban el escenario, a Dulce María, una compañera de Sandra, se le ocurrió hacer estrellas de ocho picos como la de la figura 2.13.

- Para trazarlas, Dulce María tomó como base la estrella anaranjada y realizó un movimiento para obtener la estrella verde. ¿Qué movimiento hizo? ______

- Coloquen la estrella que recortaron en la actividad anterior sobre la estrella anaranjada de la figura 2.13; después, sin despegarla, realicen un movimiento lo más directo posible para que sus vértices coincidan con los de la estrella verde. Describan la trayectoria que siguieron los vértices de la estrella y dibújenla en la imagen. ______
- ¿Algún punto de la estrella se mantuvo fijo durante los movimientos? ¿Cuál? ______
- Comparen sus respuestas y procedimientos con los de otros equipos. ¿Cuáles les parecen más acertados? Justifiquen sus respuestas. ______

b) A Dulce María también se le ocurrió crear un arreglo especial con las estrellas de 8 picos; obsérvenlo en la figura 2.14.

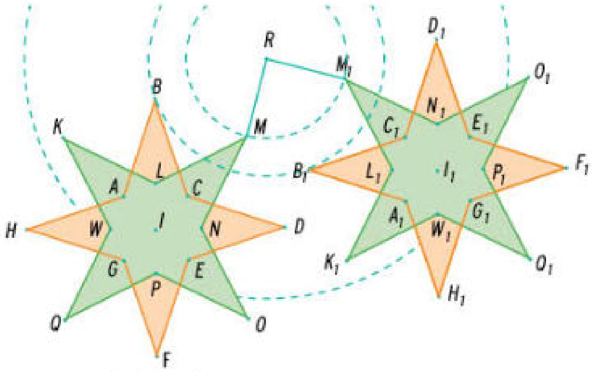


Fig. 2.14

- ¿Cómo piensan que lo hizo? ______
- ¿Cómo es la trayectoria del movimiento de la estrella copia con respecto a la original? ______
- ¿En qué ángulo desplazó la estrella? ______

El movimiento mediante el cual Dulce María construyó las estrellas se conoce como **rotación** o *simetría rotacional*. Para utilizar este recurso se debe determinar el centro de rotación, que es el punto alrededor del cual se gira la figura y que permanece fijo, aunque no necesariamente se encuentra dentro de la figura. Para cualquier rotación también hay que definir el ángulo en que giran las figuras y la dirección en que lo hacen.

Rotación: es el giro de una figura geométrica con respecto a un punto, llamado centro de rotación, de manera tal que la figura que se obtenga sea congruente a la original.

- ¿Cuál es el centro de rotación en las figuras 2.13 y 2.14? Remárquenlo en cada imagen.

- ¿En qué ángulo rotaron las imágenes de Dulce María? ______
- ¿En qué sentido giraron? ______

c) En la figura 2.14 Dulce María trazó segmentos de recta para unir los puntos C y C_1 con el punto R. ¿Cuánto mide el ángulo que forman esos segmentos?

______

- Tracen segmentos de recta que unan distintos vértices de la figura original con el centro de rotación, y segmentos que unan los vértices correspondientes a los anteriores también con el centro de rotación. ¿Cuál es la medida de los ángulos que se forman entre cada terna de puntos?

______

- ¿Qué relación observan entre la respuesta a la pregunta anterior y el ángulo de rotación de la figura 2.14?

______

d) Midan la longitud de cada segmento que une un vértice de la figura original con el punto R y compárenla con la de los segmentos correspondientes de la figura rotada. ¿Qué observan? ______

e) Unan los puntos D y D_1 de la figura anterior con un segmento y tracen la mediatriz del segmento. ¿Por cuál punto pasa? ______

- Unan también los puntos C y C_1 mediante un segmento y tracen su mediatriz. ¿Por cuál punto pasa? ______
- ¿Esta propiedad se cumple para cualquier par de puntos correspondientes entre la figura original y la figura rotada? Comprueben su respuesta.

Esta propiedad de las rotaciones es útil cuando se desconoce el *centro de rotación*.

Compartan sus respuestas con otros equipos y valídenlas con ayuda de su profesor.

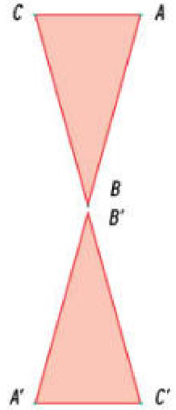


Fig. 2.15

Integración

4. En grupo describan en su cuaderno las propiedades de la rotación. Usen los siguientes conceptos: congruencia, centro de rotación, ángulos, lados, segmentos de recta, distancia, vértices correspondientes.

5. En parejas analicen la figura 2.15 y respondan en sus cuadernos.

a) El triángulo $A'B'C'$ es la imagen del triángulo ABC. Jorge dice que el triángulo ABC tuvo una rotación de 180° y Ximena comenta que los triángulos son simétricos respecto de un eje. ¿Quién tiene la razón? Justifiquen su respuesta.

______

b) Al cuadrilátero $ABCD$ se le aplicaron dos simetrías a partir de los ejes perpendiculares que se muestran. ¿El cuadrilátero $A''B''C''D''$ se puede obtener rotando el cuadrilátero $ABCD$? Si su respuesta es afirmativa, identifiquen el centro y ángulo de rotación; si es negativa, justifiquen su respuesta.

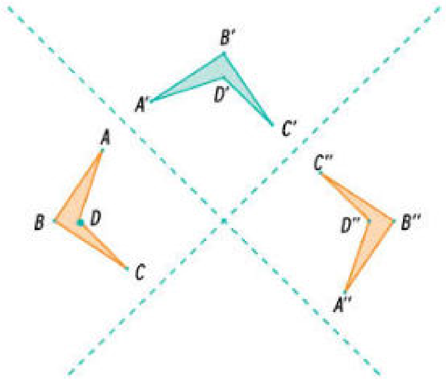


Fig. 2.16

Se dice que una figura tiene *simetría central* si al rotarla 180° desde su centro, la figura rotada coincide con la original.

c) ¿Cuántos grados en dirección horaria debe rotar desde su centro el pentágono de la figura 2.17 para que el segmento $\overline{MN}$ coincida con el segmento $\overline{PO}$?

______

d) ¿Un pentágono regular tiene simetría central ¿Por qué?

______

______

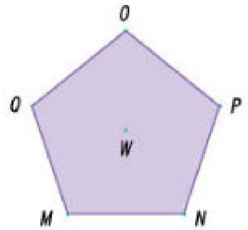


Fig. 2.17

Consolido mis aprendizajes

1. De manera individual realiza las siguientes actividades.

a) En el problema inicial de la página 74 identifica la transformación que se debe hacer a las estrellas en color amarillo para obtener las estrellas en blanco.
b) ¿En qué punto se encontraría el centro de la transformación?
c) ¿Un triángulo equilátero tiene simetría central? Justifica tu respuesta en tu cuaderno.
d) ¿Un rectángulo tiene simetría central? Justifica tu respuesta en tu cuaderno.
e) Identifica qué transformación se hizo en cada figura para obtener su copia.

i)

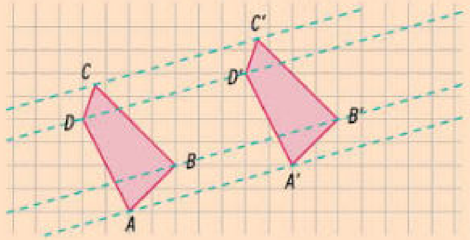


Fig. 2.18

ii)

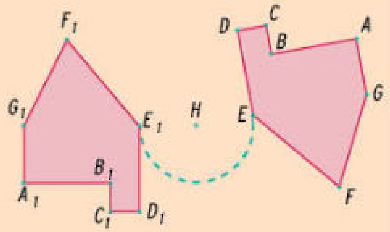


Fig. 2.19

2. Elabora un par de figuras semejantes en tu cuaderno y pide a un compañero que reproduzca una de ellas a partir de la otra aplicando traslación y rotación. Haz lo mismo con las imágenes que él proponga. Al final verifiquen que sus transformaciones sean correctas.

Diseños con simetría, rotación y traslación

Inicio a partir de lo que sé

Formen parejas y resuelvan el siguiente problema.

En la figura 2.20 se observan dos imágenes de una serie que corresponde a la animación de una carrera de autos. En su cuaderno dibujen dos imágenes intermedias de la serie en dos momentos distintos, teniendo en cuenta que los autos no pueden cambiar de carril y que el movimiento de cada uno es independiente.

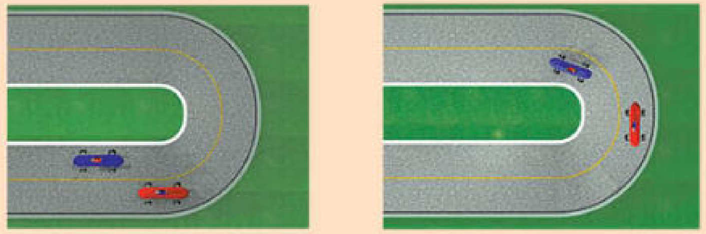


Fig. 2.20

Resuelvo y aprendo

Diseños a partir de simetrías y transformaciones

1. En equipos resuelvan los siguientes problemas.

a) Mariana desea participar en un concurso de su escuela, donde se elegirá el logotipo del plantel. Los organizadores han establecido que el logotipo debe ser original y simétrico. En su propuesta, Mariana tomó como base la figura 2.21.

Fig. 2.21

A partir de ella hizo rotaciones respecto al punto *O*, considerando 60° como ángulo de giro. Su primera rotación fue la siguiente.

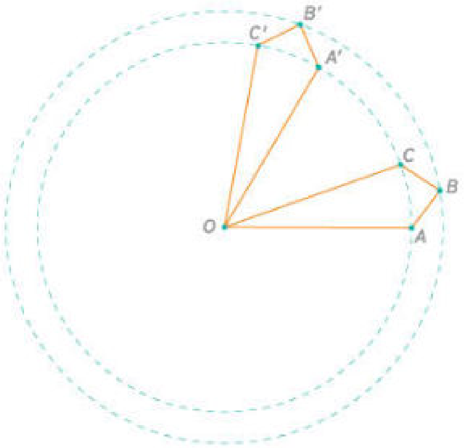


Fig. 2.22

- Continúen las rotaciones, siempre con un ángulo de giro de 60° a partir de la figura previa, hasta completar el ciclo.
- ¿Con cuántas figuras se cerró el ciclo?

- ¿El diseño completo tiene ejes de simetría? En caso de que así sea, identifiquen cuántos y trácenlos en la figura. En caso contrario, justifiquen su respuesta.

- Si trazan una recta que pase por uno de los vértices de la figura, digamos el punto *A*, y el punto *O*, ¿por qué otro punto de la figura pasará esa recta?

- Repitan el paso anterior para cualquier otro punto de la figura y *O*. ¿Qué observan?

- Midan la distancia entre *O* y los puntos de la figura por los que pasa cualquiera de las rectas. ¿Qué observan?

Cuando ocurre lo anterior, para todos los puntos de una figura se dice que esta tiene *simetría central* con respecto a un punto; en este caso, la simetría tiene centro en *O*.

- ¿Qué pasaría si rotaran 180° la figura con respecto al punto *O*?

Lo anterior también es prueba de que hay simetría central.

Marina decidió participar con otras propuestas para el logotipo de su escuela. El nuevo modelo tiene como base la siguiente figura. Tracen la figura en su cuaderno y realicen rotaciones consecutivas de 45° con respecto al punto *P*; consideren las características de la simetría central.

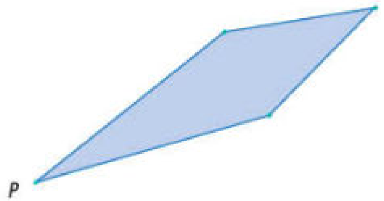


Fig. 2.23

Expliquen en su cuaderno el proceso que siguieron para diseñar el logotipo. Comparen su procedimiento con los de otros equipos y valídenlos a partir de su practicidad y resultados.

Integración

2. En grupo y con ayuda de su profesor escriban en su cuaderno un método para construir figuras a partir de una figura base que combine rotaciones y el uso de las propiedades de la simetría central.

3. Resuelvan el siguiente problema en equipos.

a) La figura 2.24 es la base de la figura 2.25 que se hizo mediante rotaciones.

Fig. 2.24

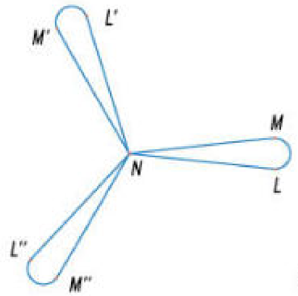


Fig. 2.25

- ¿A partir de qué ángulo se hicieron las rotaciones? ______
- ¿Respecto a qué punto se rotaron las figuras? ______
- ¿La figura completa tiene simetría central? Expliquen su respuesta.

______

Integración

4. En grupo analicen la relación entre el ángulo de rotación de las figuras anteriores y las propiedades de la simetría central. ¿Cómo influye el valor del ángulo de rotación de una figura en que ésta tenga o no simetría central?

5. Resuelvan las siguientes actividades en equipos.

a) Busquen en anuncios publicitarios, revistas o cualquier otro medio, tres logotipos o imágenes corporativas o institucionales con simetría axial, rotacional o central. Cópienlos e identifiquen el tipo de simetría, ejes, figura base, ángulo de rotación, punto sobre el que se rota, según sea el caso. Tracen esos elementos en las figuras correspondientes.

Tipo de simetría:	Tipo de simetría:	Tipo de simetría:

b) Observen la figura y apliquen todas las simetrías axiales posibles considerando como ejes las líneas punteadas.

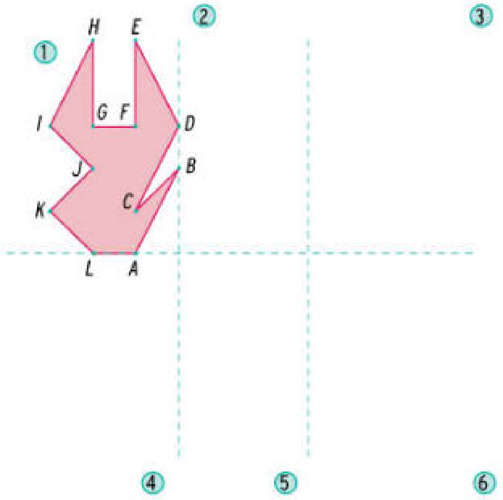


Fig. 2.26

- ¿Cómo son entre sí todas las figuras? ______
- ¿Con qué otra transformación directa podrían obtener la figura que trazaron en el espacio 3 a partir de la figura original? ______
- ¿Con qué otra transformación directa es posible construir la figura que trazaron en el espacio 5 con base en la figura original?

______

- Elijan otro par de figuras de las que una se pueda reproducir a partir de la otra mediante una transformación diferente a la simetría axial. Expliquen en su cuaderno cuál y cómo sería la transformación.

c) Observen cómo se aplicaron dos transformaciones a la figura original *ABCDE* para obtener la copia *A'B'C'D'E'*.

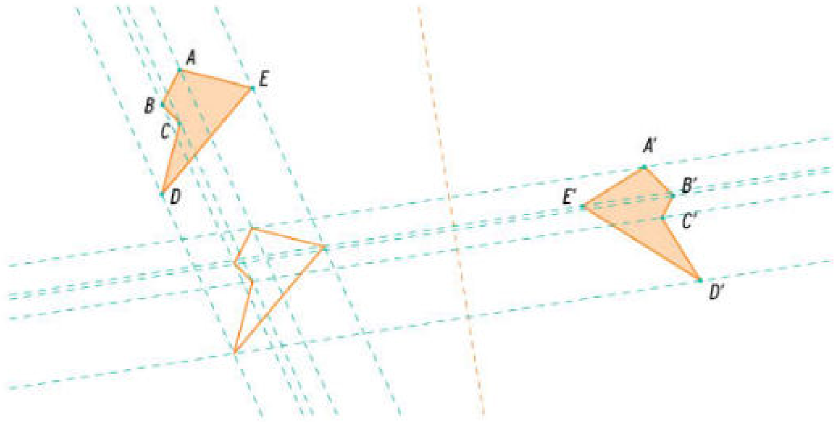


Fig. 2.27

- Expliquen en qué consisten esas transformaciones y cómo se realizaron.

- Tracen otra forma diferente de hacer la copia con base en la figura original aplicando dos transformaciones.

Fig. 2.28

d) El polígono $ABCDE$ se rotó a partir del punto O y la figura resultante se trasladó en dirección de la directriz $\overline{YY'}$. Reconstruyan la figura intermedia que se obtiene en esta transformación.

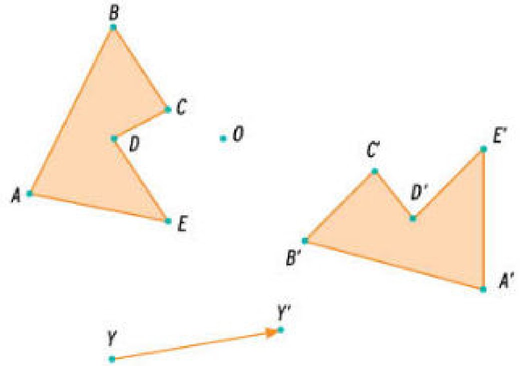


Fig. 2.29

Integración

6. En grupo, con ayuda de su profesor, anoten dos transformaciones que produzcan el mismo resultado que la transformación presentada. Observen el ejemplo.

Transformación	Dos transformaciones equivalentes
Simetría central	
Traslación	Aplicación de dos simetrías axiales con ejes paralelos.
Rotación de 180°	
Simetría axial	

Consolido mis aprendizajes

Como has observado, para cualquier pareja de figuras congruentes que se encuentren en un plano, una de ellas puede obtenerse a partir de la otra utilizando una o varias transformaciones.

1. De manera individual resuelve los siguientes problemas en tu cuaderno.

a) Regresa al problema inicial de la página 80 e identifica qué transformaciones se deben hacer al coche rojo en la primera imagen para reproducir el de la segunda, suponiendo que el movimiento se realiza sobre la misma pista. Especifica las características de cada transformación, como los grados de rotación y el sentido de la misma, la dirección de la traslación y su magnitud (directriz), el centro de simetría o el eje de simetría, según el caso.

- Identifica qué transformaciones se deben hacer al coche azul en la primera imagen para obtener el de la segunda imagen.

b) Selecciona uno de los dibujos intermedios que construiste en la página 80. Explica las transformaciones que hiciste para llegar de la primera imagen a tu dibujo.

c) En el mismo dibujo intermedio que seleccionaste explica cuáles fueron las transformaciones para llegar de tu versión a la segunda imagen.

d) La siguiente imagen corresponde al adoquinado de un piso, obsérvalo.

Fig. 2.30

- Selecciona una pieza base y explica con qué transformaciones se pueden obtener las demás para teselar el plano.

e) Diseña y traza una figura base con la que puedas, mediante transformaciones, teselar el plano.

Te invito a...

En la sección Habilidades digitales, que se encuentra al final de este bloque (página 103), podrán aplicar lo que han aprendido sobre la construcción de diseños que combinan la simetría axial y central, la rotación y la traslación de figuras.

La cuadratura del triángulo

Inicio a partir de lo que sé

En parejas resuelvan el siguiente problema.

La figura 2.31 muestra la vista superior de una fuente circular construida sobre un pedestal cuadrado, que se ilustra con un cuadrado de color azul. El conjunto está rodeado por un área cuadrada cubierta con azulejos también cuadrados como los que se ven en la figura 2.32.

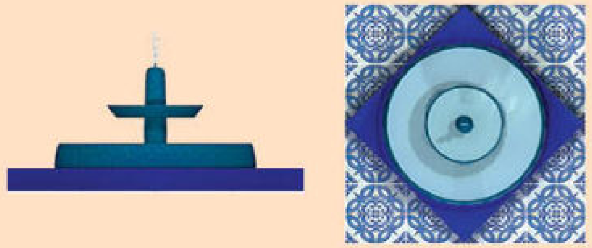


Fig. 2.31

Fig. 2.32

a) Si cada azulejo tiene 50 cm por lado, ¿cuál es el área del pedestal?
b) ¿Cuánto mide cada lado del pedestal?

Resuelvo y aprendo

Cuadrados construidos sobre los lados de un triángulo

1. En equipos resuelvan las siguientes situaciones.

a) En una hoja de papel o cartulina tracen una figura semejante a la de la figura 2.33 y recorten los triángulos de colores. Acomódenlos en los dos cuadrados en blanco de manera que cubran las áreas sin sobreponerse.

- ¿Es posible cubrir toda el área de los dos cuadrados con los triángulos que forman el cuadrado mayor? Justifiquen su respuesta.

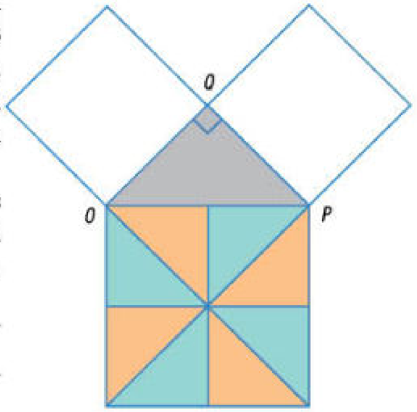


Fig. 2.33

- ¿Qué tipo de triángulo es el triángulo *OPQ*?
- De acuerdo con sus resultados, ¿cómo es el área del cuadrado mayor respecto a la de los dos cuadrados menores?

b) En una hoja de papel o de cartulina tracen un arreglo semejante a la figura 2.34. Coloreen y recorten el cuadrado azul y los trapezoides de colores del cuadrado mediano. Con esos cuadriláteros intenten cubrir el área del cuadrado blanco sin que las piezas se sobrepongan. ¿Lo lograron? Respondan a partir de sus resultados.

- ¿Qué tipo de triángulo se forma entre los tres cuadrados?
- Expresen el área del cuadrado azul con respecto al lado de longitud *a* del triángulo.
- Expresen también las áreas de los cuadrados trazados con los lados de longitud *b* y *c* del triángulo central.

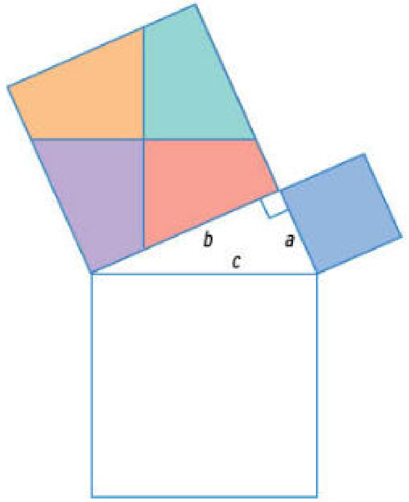


Fig. 2.34

- ¿Cómo es el área del cuadrado construido sobre el lado de mayor longitud del triángulo en términos del área de los cuadrados trazados sobre los lados de menor longitud?
- En equipo analicen y escriban si hay alguna relación entre las áreas de los cuadrados que se forman a partir de los lados del triángulo.

Comparen sus resultados con otros equipos. ¿Todos lograron cubrir los cuadrados con las piezas correspondientes? Validen sus resultados y corríjanlos si es necesario.

En grupo escriban una conclusión en torno a la relación entre el área de los cuadrados que se forman a partir de los lados menores de un triángulo rectángulo y el que se origina a partir del lado de mayor longitud; justifíquenla.

Te invito a...

visitar la dirección electrónica www.edutics.mx/4i2 y realizar la actividad Demostración. Escriban qué relación o relaciones se cumplen entre las áreas de los cuadrados que se construyen sobre los lados del triángulo y comparen sus conclusiones con otros equipos. (Consulta: 21 de enero de 2019).

2. En equipos resuelvan lo siguiente.

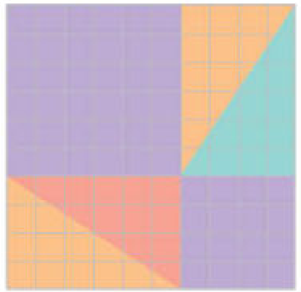


Fig. 2.35

a) ¿Cuántos triángulos congruentes con el triángulo rojo observan en las figuras 2.35 y 2.36?

- Por tanto, ¿cómo es el área de esos triángulos entre sí?

- Comparen el área de los cuadrados morados que se forman en la figura 2.35 a partir de los dos lados de menor longitud del triángulo rojo con el área del cuadrado interior de la figura 2.36. Escriban la relación entre las áreas de los tres cuadrados.

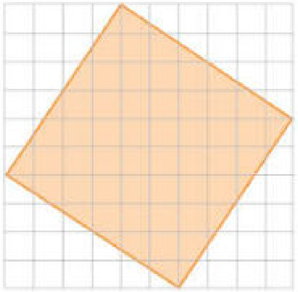


Fig. 2.36

- ¿A qué lado del triángulo rojo corresponde la longitud de los lados del cuadrado interior de la figura 2.36?

- Consideren que cada cuadro que forma la cuadrícula sobre la que se trazaron las imágenes mide 1 cm de lado. ¿Cuál es la medida del área del cuadrado morado que se forma sobre el lado mediano del triángulo rojo?

- ¿Cuál es el área del cuadrado morado que se forma sobre el lado menor del triángulo rojo? ______
- ¿Cuál es la medida del área del cuadrado interior de la figura 2.36?

- Relacionen las tres áreas y contesten: ¿cómo es el área del cuadrado interior de la figura 2.36 respecto a las áreas de los cuadrados morados de la figura 2.35?

Reflexionen. ¿Qué tienen en común el triángulo rojo de la figura 2.35 y el triángulo *OPQ* de la figura 2.33 y el triángulo de la figura 2.34?

Se llama *hipotenusa* al lado opuesto al ángulo recto de un triángulo rectángulo y siempre es el lado de mayor longitud. Los lados adyacentes al ángulo recto de un triángulo rectángulo se denominan *catetos* y son los lados de menor longitud. La figura 2.37 muestra dónde se ubican la hipotenusa y los catetos en un triángulo rectángulo.

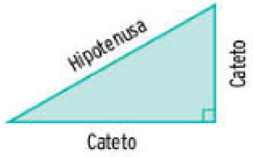


Fig. 2.37

b) Observen las figuras 2.38 y 2.39. ¿Los cuadrados en blanco en cada figura se pueden cubrir con las piezas de los cuadrados de colores? ¿Les faltaría o les sobraría espacio? ¿Por qué?

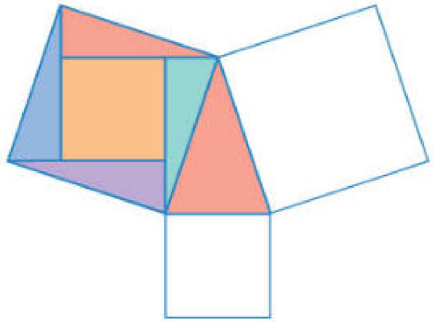


Fig. 2.38

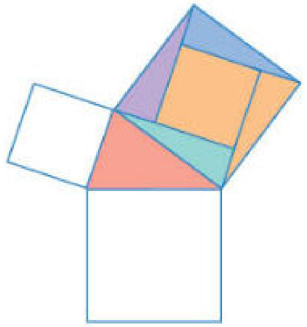


Fig. 2.39

- ¿Qué tipo de triángulo se forma en el centro de los cuadrados de la figura 2.38 de acuerdo con las medidas de sus ángulos? ______
- ¿Qué tipo de triángulo se forma en el centro de los cuadrados de la figura 2.39 de acuerdo con las medidas de sus ángulos? ______

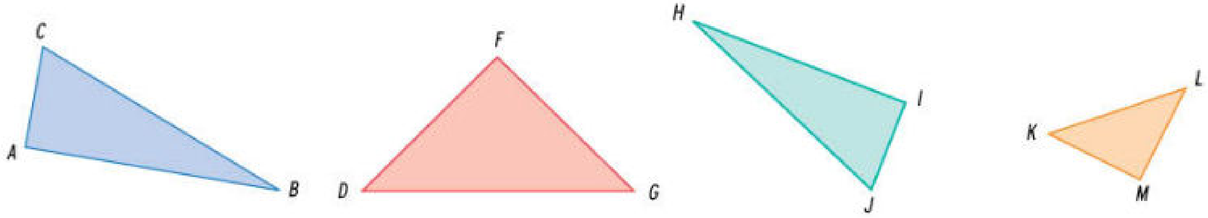
En grupo compartan sus respuestas y, con apoyo del profesor, escriban en sus cuadernos si existe relación entre las áreas de los cuadrados que se construyen sobre los lados de un triángulo no rectángulo.

Análisis de las relaciones entre las áreas de los cuadrados que se construyen a partir de las medidas de los lados de un triángulo

3. En equipos resuelvan la siguiente actividad.

a) Calculen el área de los cuadrados que es posible trazar a partir de las medidas de los lados de cada triángulo de la figura 2.40. ¿Qué datos necesitan? ¿Cómo pueden obtenerlos? Con base en sus cálculos, completen la tabla de la siguiente página y contesten.

Fig. 2.40



Triángulo	Área del cuadrado de lado con medida igual al lado de mayor longitud del triángulo	Suma de las áreas de los cuadrados con medidas iguales a los lados de menor longitud del triángulo	Clasificación del triángulo de acuerdo con la medida de sus ángulos	Clasificación del triángulo de acuerdo con la medida de sus lados
ABC			Rectángulo	
				Escaleno

- ¿Qué relación se observa entre las áreas de los cuadrados obtenidos a partir de la media de los lados de los triángulos?

____

- ¿En qué tipo de triángulos, según las medidas de sus ángulos, se cumple esa relación?

____

Integración

4. En grupo y con ayuda de su profesor completen lo siguiente.

El área del cuadrado que se construye sobre ____________ de un triángulo ____________ es ________ a la suma de las ______ de los cuadrados que construyen sobre ____________.

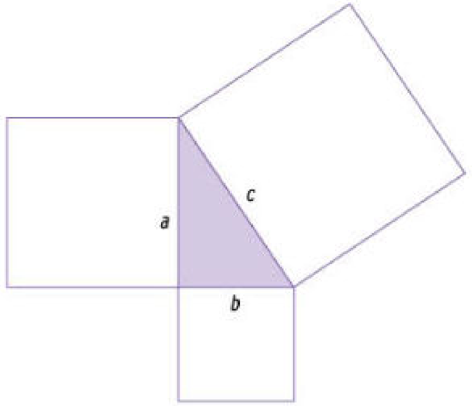


Fig. 2.41

5. En equipos resuelvan lo siguiente.

a) Observen que en la figura 2.41 se muestra un triángulo rectángulo, cuyos lados miden *a*, *b* y *c*.

- Determinen el área de cada cuadrado que se forma en los lados del triángulo en términos de las medidas señaladas con literales. Anótenlas en los cuadrados correspondientes.
- ¿Cómo se relacionan entre sí estas áreas? Escriban una expresión algebraica que relacione las áreas de los cuadrados que se forman a partir de los lados de un triángulo rectángulo.

____

Integración

6. En grupo, con ayuda de su profesor, completen la expresión algebraica para las relaciones que se cumplen entre los cuadrados que es posible trazar a partir de los lados de un triángulo rectángulo.

$$c^{\square} = a^{\square} + b^{\square},$$

donde *c* es la medida de la hipotenusa y *a* y *b*, la de los catetos del triángulo.

Consolido mis aprendizajes

1. En parejas retomen la actividad inicial y determinen la longitud del cuadrado que forma el pedestal de la fuente con base en la longitud de los azulejos del área cuadrada inferior. Apliquen lo aprendido respecto a la relación entre las áreas de los cuadrados que se forman con los lados de un triángulo rectángulo. Al terminar, comparen su resultado con el que tuvieron al inicio. Corrijan los resultados si tuvieron algún error.

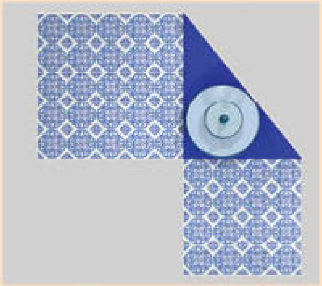


Fig. 2.42

2. Resuelvan la siguiente variante del problema inicial. Anoten sus procedimientos y respuestas en sus cuadernos.

a) El pedestal de otra fuente tiene forma de triángulo rectángulo y, como ilustra la figura 2.42, sus lados se cubrieron con los azulejos del problema inicial. ¿Cuánto mide el área del piso cuadrado que se construirá a partir de la hipotenusa?

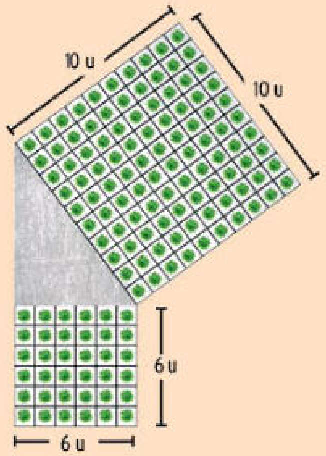


Fig. 2.43

3. En una huerta, los árboles de mango se ubican en arreglos cuadrados como se observa en la figura 2.43. Cada árbol se encuentra en el centro de un cuadrado menor que mide una unidad, u, de lado. Los cuadrados que forman los terrenos de la plantación se encuentran a los lados del terreno de una granja con forma de triángulo rectángulo.

a) Si se siembran más árboles con el mismo arreglo cuadrado, a partir del tercer lado de la granja, ¿cuántos árboles se podrán plantar en ese terreno?

b) ¿Cuánto mide, en *u* unidades, el tercer lado de la granja?

4. El cateto de longitud *b* de uno de los triángulos de la figura 2.44 mide el doble que el cateto de longitud *a*.

a) ¿Cuál es el área de un cuadrado trazado sobre la hipotenusa en el centro *c* de los triángulos?

b) ¿Cuánto mide el área del cuadrado que se forma en el centro de la figura en términos de las medidas de los catetos del triángulo rectángulo?

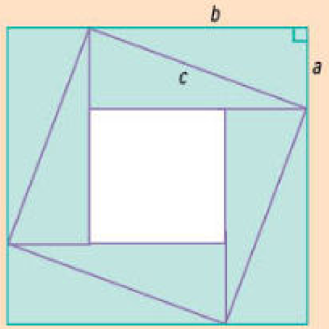


Fig. 2.44

En grupo comparen sus respuestas y si encuentran diferencias, identifiquen sus errores y corríjanlos.

El teorema de Pitágoras

Inicio a partir de lo que sé

En parejas resuelvan el siguiente problema.

Jorge solicitó un servicio de internet pero la compañía proveedora le informó que para realizar la conexión de manera inmediata, su casa tendría que estar a una distancia igual o menor a 150 m de la de otro usuario. Jorge localizó su dirección en el mapa de la Guía Verdi que se muestra en la figura 2.45. Su casa se encuentra en la esquina de las calles J. M. Jiménez y M. Hidalgo, y la del usuario más cercano, en la esquina de las calles J. Aldama y M. Hidalgo.

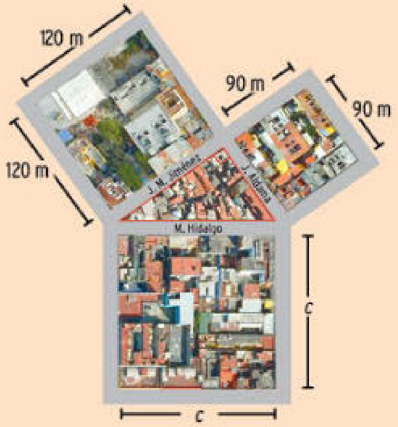


Fig. 2.45

a) ¿Cuál es la distancia entre ambas esquinas?

b) ¿La compañía de internet le podrá brindar el servicio de conexión a Jorge de manera inmediata?

Resuelvo y aprendo

¿Qué nos dijo Pitágoras?

1. En parejas resuelvan lo siguiente.

a) Calculen el área de las figuras geométricas construidas sobre los lados de cada uno de los triángulos. ¿Qué datos necesitan? Obténgalos, completen la tabla de la página siguiente y contesten.

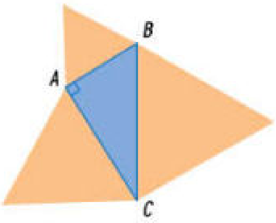


Fig. 2.46

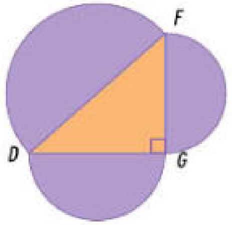


Fig. 2.47

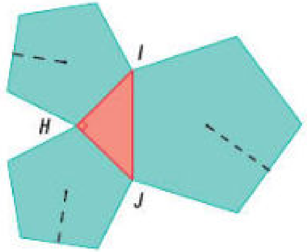


Fig. 2.48

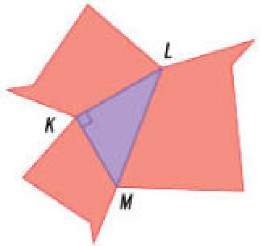


Fig. 2.49

Triángulo	Área de la figura geométrica construida sobre la hipotenusa del triángulo	Suma de las áreas de las figuras geométricas construidas sobre los catetos del triángulo	Clasificación del triángulo de acuerdo con la medida de sus ángulos
ABC			

Te invito a...

visitar la dirección electrónica www.edutics.mx/Zio e ingresar a Matemáticas 3 y resolver la actividad 33. Compara tus procedimientos con los de tus compañeros y con ayuda de su profesor validen sus respuestas. (Consulta: 21 de enero de 2019).

- ¿Existe una relación entre el área de las figuras geométricas formadas en las hipotenusas y el área de las figuras formadas en los catetos de cada triángulo?

- Describan dicha relación.

En grupo y con ayuda de su profesor reflexionen. ¿La forma de la figura geométrica construida sobre los lados del triángulo rectángulo es determinante para que se cumplan las relaciones que han encontrado? ¿Para que se cumplan estas relaciones es necesario que las figuras geométricas estén formadas sobre un triángulo rectángulo? Escriban sus conclusiones en su cuaderno.

b) Midan los lados de cada uno de los triángulos de las figuras siguientes, eleven esas medidas al cuadrado y completen la tabla.

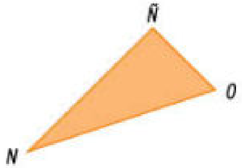


Fig. 2.50

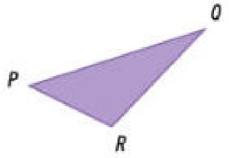


Fig. 2.51

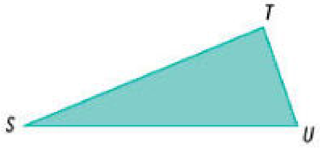


Fig. 2.52

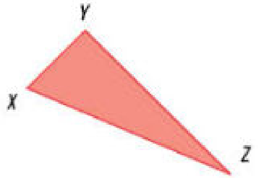


Fig. 2.53

Triángulo	Cuadrado de la longitud del lado mayor del triángulo (cm^2)	Suma de las longitudes de los lados de menor tamaño del triángulo elevadas al cuadrado (cm^2)	Clasificación del triángulo de acuerdo con la medida de sus ángulos
NÑO			

En grupo comparen sus resultados y observen si hay una relación entre las medidas de los triángulos elevadas al cuadrado. Escriban sus conclusiones en su cuaderno.

c) En parejas realicen lo que se indica a partir de la figura 2.54.

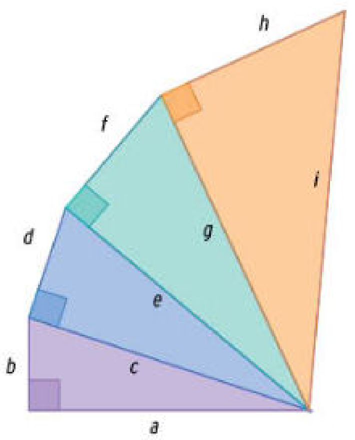


Fig. 2.54

- Completen las expresiones algebraicas que representan las relaciones entre las longitudes de los lados del triángulo color morado.

$a^2 = c^2 -$ ________ $b^2 =$ ________ $c^2 =$ ________

- Completen las expresiones algebraicas en términos de las longitudes de los lados de los triángulos.

$d^2 =$ ________ $g^2 =$ ______ $+ e^2$

$e^2 = d^2 +$ ________ $h^2 =$ ________

$f^2 =$ ________ $i^2 =$ ________

Comparen y comenten sus resultados con otra pareja y escriban las relaciones que se cumplen entre la hipotenusa y los catetos de un triángulo rectángulo.

Integración

2. En grupo y con ayuda de su profesor completen lo siguiente.

Para cualquier triángulo rectángulo, si *c* representa la longitud de la hipotenusa y *a* y *b* las longitudes de los catetos, se cumple la relación:

$c^2 =$ ________________

A esta relación entre las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo se le conoce como el *teorema de Pitágoras*, y se enuncia de la siguiente manera:

El cuadrado de la hipotenusa de cualquier triángulo rectángulo es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

Uso del teorema de Pitágoras

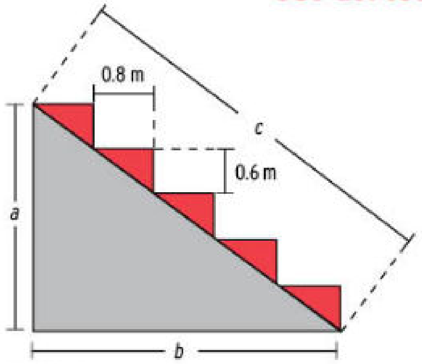


Fig. 2.55

3. En equipos resuelvan las siguientes actividades.

a) Sobre una rampa se quiere construir una escalinata como se muestra en la figura 2.55.

- ¿Cuánto mide la altura de la rampa? ________
- ¿Cuánto mide el largo de la rampa? ________
- ¿Cuál es la longitud de la rampa? ________

b) El extremo de una cuerda se ata al tope del mástil de un barco velero y el otro extremo a la proa del barco. La longitud de la cuerda y la distancia de la proa al mástil se muestran en la figura 2.56.

- ¿Se cumplen las condiciones para poder calcular mediante el teorema de Pitágoras la altura del mástil? Justifiquen su respuesta.

____

____

____

- ¿Cuál es la altura del mástil del barco? ________

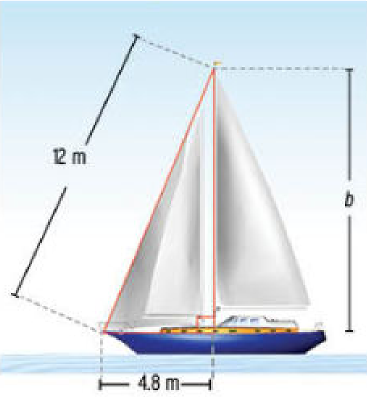


Fig. 2.56

c) Un barco se encuentra a 168 m de distancia de la base de un faro que se ubica en la costa. El faro mide 57 m de altura y está sobre un peñasco de 69 m de altura sobre el nivel del mar, como se muestra en la figura 2.57.

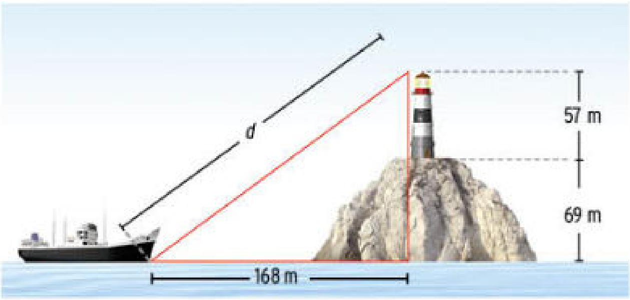


Fig. 2.57

- ¿Se cumplen las condiciones necesarias para saber si se puede aplicar el teorema de Pitágoras y calcular la distancia entre el barco y el punto más alto del faro? De no ser así, añadan la o las condiciones que hacen falta y encuentren el valor de *d*.

d) Una niña vuela un papalote cuya cola mide 9 m y se sabe que el largo del hilo con el que lo sujeta es de 11.4 m.
Debido al viento, la cola de la cometa no está en posición vertical, como se ilustra en la figura 2.58.

- ¿Se puede aplicar el teorema de Pitágoras para encontrar la distancia entre la mano de la niña y el extremo de la cola del cometa con los datos que se tienen? Expliquen su respuesta.

____

____

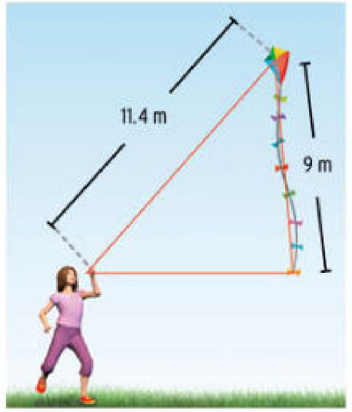


Fig. 2.58

- Si su respuesta es negativa, escriban las condiciones que debe cumplir el triángulo que represente una situación, en la que se conocen dos de sus lados, para que a partir del teorema de Pitágoras sea posible calcular la longitud del tercer lado. Si su respuesta es positiva, calculen la distancia.

____

4. En parejas resuelvan las siguientes situaciones.

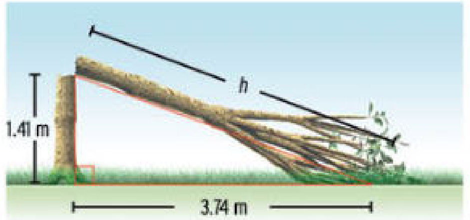


Fig. 2.59

a) Debido a los fuertes vientos, un árbol se quebró a una altura de 1.41 m, y su tronco formó un triángulo con el piso como aparece en la figura 2.59.

- ¿Cuánto mide la hipotenusa del triángulo que se formó entre el árbol y el piso?
- ¿Cuál era la altura del árbol antes de quebrarse?

b) El avión que muestra la figura 2.60 se encuentra a una altura de 0.33 km sobre un punto de la superficie que, a su vez, está a una distancia de 3.5 km del inicio de la pista. ¿Qué distancia ha recorrido?

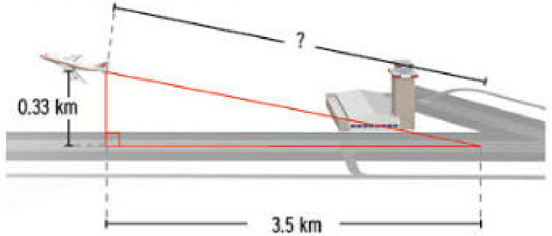


Fig. 2.60

c) ¿A qué distancia de un muro hay que colocar la base de una escalera de 4 m de longitud para que alcance una altura de 3 m sobre el piso?

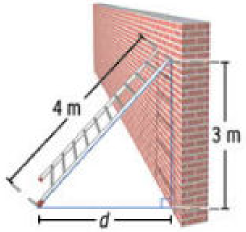


Fig. 2.61

d) Las dimensiones de una cancha de futbol se muestran en la figura 2.62.

- ¿Se puede aplicar el teorema de Pitágoras para encontrar la longitud de su diagonal? Expliquen su respuesta.

____

____

- Si su respuesta es afirmativa, calculen dicha medida.

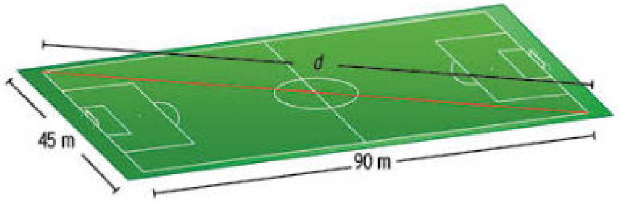


Fig. 2.62

Comparen sus resultados con los de otras parejas, valídenlos y, si es necesario, corríjanlos.

Consolido mis aprendizajes

1. Regresen a la situación inicial y resuélvanla en parejas utilizando el teorema de Pitágoras. Al terminar comparen y validen sus resultados.

2. De manera individual resuelve las siguientes situaciones.

a) Iván quiere compartir el servicio de internet con su primo Jonathan a través de una conexión inalámbrica. El instructivo del módem indica que la señal tiene un alcance de 90 m. En Gugolmapas encontraron el mapa que se muestra en la figura 2.63, donde se pueden ver las calles alrededor de su domicilio. Iván vive en la esquina de las calles E. Zapata y F. Villa, y Jonathan, en la esquina de las calles V. Carranza y F. Villa.

Fig. 2.63

- ¿En esta situación se cumplen las condiciones para aplicar el teorema de Pitágoras?
- ¿Qué distancia hay entre la vivienda de Iván y la de Jonathan?
- ¿Podrán compartir la conexión a internet sólo con el módem de Iván?

b) Encuentra la medida de la diagonal mayor del rombo de la figura 2.64.

c) ¿Cuál es el perímetro del rectángulo de la figura 2.65?

d) ¿Cuál es la longitud de la apotema del heptágono regular de la figura 2.66 si su perímetro es igual 14 cm?

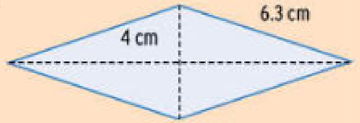


Fig. 2.64

e) Angélica quiere comprar un espejo de forma circular de 2.30 m de diámetro. Si la puerta de la entrada de su casa mide 1 m de ancho por 2.2 m de alto, ¿podrá pasar el espejo?

f) Un automóvil recorre 90 km hacia el este, 100 km rumbo al norte y luego 15 km al oeste. ¿A qué distancia está del punto donde comenzó su recorrido?

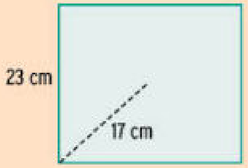


Fig. 2.65

3. Escribe en tu cuaderno los elementos o condiciones que deben estar presentes en una situación para poder usar el teorema de Pitágoras, compara tu respuesta con un compañero y juntos planteen una situación que requiera hacer uso del teorema de Pitágoras para resolverla. La situación debe ser real y de su entorno, de modo que al final puedan comprobar físicamente su respuesta. Pidan a otra pareja que resuelva la situación que ustedes plantearon y resuelvan la que ellos propusieron. Valídenlas con apoyo de su profesor.

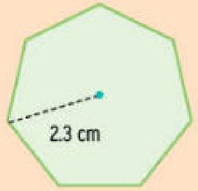


Fig. 2.66

En grupo comparen sus respuestas y procedimientos. Verifiquen que sean correctos y corríjanlos si es necesario.

Probabilidad de eventos mutuamente excluyentes

Inicio a partir de lo que sé

En parejas aborden la siguiente situación y argumenten sus respuestas.

Liz y Luis colaboran con sus padres en las tareas del hogar. Para dividirse las labores los hermanos deciden lanzar un dado que tiene marcados los números del 1 al 6 en sus caras. Si al lanzarlo la cara superior del dado es un número menor que 3, Liz puede escoger primero la tarea que quiere realizar, de lo contrario, Luis elige primero. ¿Consideras que el método de Liz y Luis es equitativo? ¿Por qué?

a) ¿Cuál es la probabilidad de que, al tirar el dado, la cara superior sea un número menor que 3?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que, al tirar el dado, la cara superior no sea un número menor que 3?
c) Liz piensa que la condición es injusta, así que propone la siguiente regla: Si al lanzar el dado, la cara superior es un número menor que 3 o mayor que 5, entonces ella gana. ¿Con esta condición las posibilidades de Liz de ganar aumentan o disminuyen? ¿La nueva propuesta de Liz es equitativa? Justifiquen su respuesta.
d) ¿En cuál de las dos situaciones es más probable que gane Luis? ¿Por qué?

Resuelvo y aprendo

Probabilidad de eventos

1. En equipos analicen y resuelvan las siguientes situaciones.

a) En una urna cerrada hay 5 canicas: 2 rojas, 1 azul y 2 blancas. El experimento consiste en extraer una canica al azar, registrar su color y devolverla a la urna.

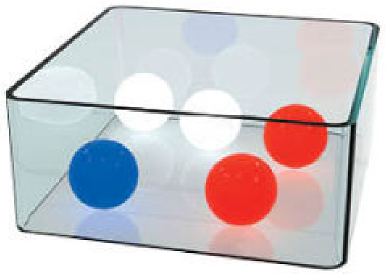


Fig. 2.67

- ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?
  - Dado que hay 5 canicas en la urna, el espacio muestral consta de 5 elementos.
  - Como hay canicas de 3 colores distintos, el espacio muestral consta de 3 elementos: "extraer una canica roja", "extraer una canica azul" y "extraer una canica blanca".
- Representen el espacio muestral del experimento.

- Consideren los siguientes eventos y determinen su probabilidad:
  - A: Se extrae una canica roja. $P(A) =$ ______
  - B: Se extrae una canica azul. $P(B) =$ ______
  - C: Se extrae una canica blanca. $P(C) =$ ______
- La expresión $P(A \text{ o } B)$ indica la probabilidad de que ocurra el evento A, o bien, que ocurra el evento B, es decir, que al extraer una canica, ésta sea roja o azul. ¿Cuál es el valor numérico de esta probabilidad? ¿Cómo obtuvieron el resultado? Justifiquen su respuesta.

$P(A \text{ o } B) =$ ______

- ¿Cuál es el valor numérico de $P(A \text{ o } C)$? ______
- ¿Qué relación existe entre este resultado y los valores numéricos de $P(A)$ y $P(C)$?
- ¿Qué significa en este contexto la expresión $P(A \text{ o } B \text{ o } C)$?
- ¿Cuál es el valor numérico de $P(A \text{ o } B \text{ o } C)$? Justifiquen su respuesta.
- Analicen la siguiente expresión: $P(A \text{ y } B) = 0$. ¿Qué significa?
- ¿Es correcto el valor numérico de $P(A \text{ y } B)$? ¿Por qué?

Notación
La expresión $P(X \text{ o } Y)$ indica la probabilidad de que ocurra el evento X, o bien, ocurra el evento Y; la expresión $P(X \text{ y } Y)$ indica la probabilidad de que los eventos X y Y ocurran simultáneamente.

b) Comparen sus resultados con los de otros equipos y comenten.
- La importancia de determinar el espacio muestral de un experimento aleatorio.
- Su procedimiento para calcular $P(A \text{ o } B)$ y $P(A \text{ o } C)$.

En Probabilidad, un *evento simple* es aquel en el que sólo se considera un elemento del espacio muestral, como en el evento el B. Los eventos *compuestos* constan de 2 o más elementos; es el caso de los eventos A, C, (A o B), etcétera.

Integración

2. En grupo y con la validación del profesor completen el siguiente enunciado.

a) La probabilidad de dos ______ mutuamente excluyentes es igual a la ______ de las probabilidades de cada evento por separado, es decir: $P(X \text{ o } Y) = P(X)$ ______ $P(Y)$.

Esta relación se conoce como *regla de la suma*.

Probabilidad de eventos compuestos

3. En equipos realicen la siguiente actividad.

a) Con las cartas que se muestran de una baraja española se realiza el experimento de extraer una al azar, registrar su número y devolverla al paquete. Se barajean y se repite el experimento. Consideren los siguientes eventos.

Fig. 2.68

A: Se obtiene una carta con un número 1.
B: La carta extraída tiene un número mayor que 2.
C: El número de la carta es par.
D: No sale una carta con el número 1.
E: El número de la carta es menor que 3.
F: La carta tiene un número impar.

- Completen el espacio muestral del experimento: {______, ______, ______, ______, ______, ______, ______, 3 de bastos , 3 de copas, ______}
- ¿Cuál es la probabilidad de cada evento? Expresen el resultado en decimales.

$P(A) =$ ______ $P(C) =$ ______ $P(E) =$ ______
$P(B) =$ ______ $P(D) =$ ______ $P(F) =$ ______

- Escriban todos los pares de estos eventos que sean mutuamente excluyentes.
- ¿Cuáles de estos eventos son complementarios?
- Determinen la probabilidad de que ocurran los siguientes eventos compuestos.

$P(A \text{ o } B) =$ ____ $P(A \text{ o } C) =$ ____ $P(A \text{ o } D) =$ ____ $P(C \text{ o } F) =$ ____

- El evento A y el evento E no son mutuamente excluyentes. ¿Por qué?
- ¿Qué elementos del espacio muestral corresponden al evento compuesto (A o E)?
- ¿Cuál es la probabilidad de que al sacar una carta al azar ocurra el evento compuesto (A o E)?
- ¿Cuál es la probabilidad de que ocurran los siguientes eventos compuestos?

$P(B \text{ o } C) =$ ______ $P(D \text{ o } F) =$ ______ $P(E \text{ o } F) =$ ______

- ¿En las dos preguntas anteriores se satisface la relación $P(X \text{ o } Y) = P(X) + P(Y)$? ¿Por qué? Expliquen el hecho considerando si los eventos son o no mutuamente excluyentes.
- ¿Qué elementos del espacio muestral corresponden al evento (B o D)?
- ¿Qué elementos del espacio muestral corresponden al evento: ocurre B y D simultáneamente? ______
- Escriban el valor numérico de la probabilidad de que ocurran los dos eventos anteriores.

$P(B \text{ o } D) =$ ______ $P(B \text{ y } D) =$ ______

Integración

4. En grupo y con la ayuda de su profesor completen los enunciados.

a) La regla de la suma se satisface para eventos ______ y no se cumple para eventos ______.

b) Cuando los eventos son complementarios, además se satisface que:

$P(X \text{ o } Y) = P(X) + P(Y) =$ ______

- Justifiquen su respuesta en su cuaderno.

Probabilidad de eventos complementarios

5. En equipos respondan las siguientes preguntas.

a) Alfredo y sus amigas Berenice y Claudia van al cine. En la sala ven las tres butacas contiguas que les corresponden y deciden sentarse al azar.

- ¿De cuántas maneras distintas pueden sentarse los 3 amigos? ______
- ¿Cuál es la probabilidad de que las dos chicas se sienten juntas? ______
- ¿Cuál es el complemento de ese evento? ¿Cuál es la probabilidad de que ocurra el complemento? ______

b) En un volado se lanzan al aire cinco monedas iguales.

- ¿Cuál es la probabilidad de que al menos una de ellas caiga sol? ______
- ¿Cuál es la probabilidad de que ninguna moneda caiga sol? ______
- ¿Qué relación existe entre estos eventos? ______

Te invito a...

visitar la página electrónica: www.edutics.mx/4iZ, donde podrás realizar simulaciones de volados con dos, tres y hasta cuatro monedas, así como determinar algunas probabilidades relacionadas con este experimento. (Consulta: 21 de enero de 2019).

c) Analicen y respondan. ¿Cómo se puede calcular la probabilidad de un evento a partir de su complemento? Utilicen el resultado del inciso b) de la sección Integración de la página anterior. Anoten su conclusión.

____

Integración

6. En grupo y con la validación de su profesor completen y resuelvan lo siguiente.

a) Si sabemos que A y B son eventos complementarios y conocemos $P(B)$, entonces $P(A)$ se obtiene con la siguiente relación:

$P(A) = 1.0 -$ ______________

Consolido mis aprendizajes

1. En parejas subrayen la respuesta correcta de las dos situaciones y resuelvan los problemas.

a) Para un experimento aleatorio se sabe que $P(A) = 0.35$, $P(B) = 0.45$ y $P(A \text{ o } B) = 0.70$. Entonces, podemos decir que los eventos A y B son:
- mutuamente excluyentes.
- complementarios.
- no mutuamente excluyentes.

b) Si en un experimento se sabe que $P(A) + P(B) = 1.5$, los eventos A y B:
- Son mutuamente excluyentes.
- Son complementarios.
- No son complementarios.

c) En cierto juego de mesa se usa un dado de 12 caras iguales (dodecaedro) numeradas del 1 al 12. ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzarlo la cara superior no sea un múltiplo de 4?

____

d) En el noticiario matutino de un país centroamericano informan que las probabilidades de lluvia en la franja sur del país son de 60 %, en el centro de 20 % y en la franja norte de 30 %.

El señor Vargas comenta: ¡Qué bien!, de la suma de esas probabilidades se deduce que seguramente hoy lloverá en territorio nacional.

De ningún modo —replica el señor Cruz—. Sólo se deduce, por ejemplo, que la probabilidad de que llueva en territorio nacional, pero fuera de la zona sur, es de 100 % – 60 % = 40 %.

¡Desde luego que no! —insistió el señor Vargas—. Es obvio que esa probabilidad es 20 % + 30 % = 50 %. ¡No 40 %!"

- ¿Quién de los dos tiene razón? Argumenten su respuesta:

____

____

Habilidades digitales

Transformaciones

Ahora trabajaremos con un *software* de dibujo distinto al que usamos en el bloque 1. Con esta herramienta digital libre desarrollarás habilidades en geometría y ejercitarás tu intuición, elaborarás hipótesis y validarás conjeturas. ¿Listo? ¡Comenzamos!

1. Abre el programa (figura 1), da clic en el ícono *Polígono* y observa que en la parte inferior de la ventana aparecen las instrucciones para usar la herramienta seleccionada. Dibuja un polígono con la forma que prefieras, pero asegúrate de que puedas reproducirlo más adelante. Con el botón secundario del ratón, haz clic sobre el polígono: en la parte superior de la pantalla aparecerá un menú; elige alguno de los íconos para colorear el polígono (figura 2).

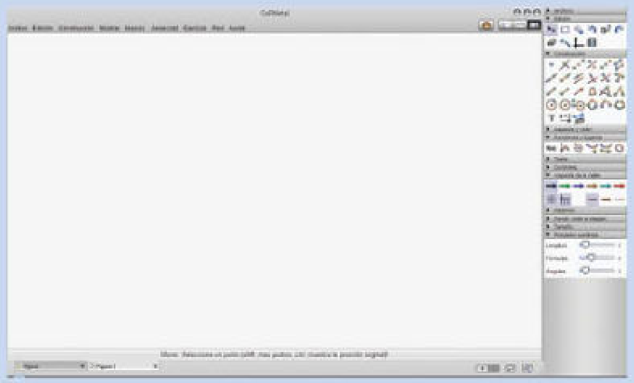


Fig. 1

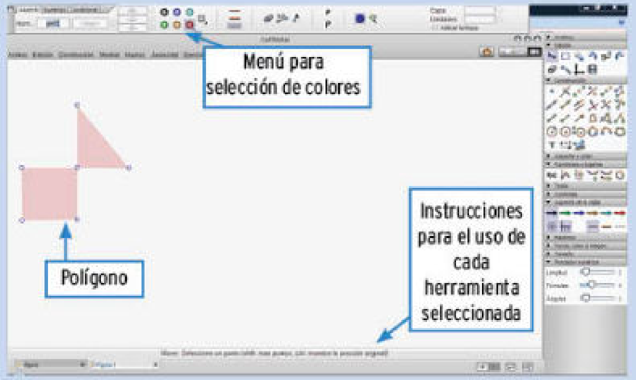


Fig. 2

2. Selecciona el ícono y dibuja una recta vertical adyacente al polígono, pero sin que lo corte (figura 3). Da clic en el ícono *Simetría axial* y dibuja puntos simétricos de los vértices del polígono respecto de la recta; para ello selecciona primero la recta y luego los vértices del polígono. Posteriormente, con la herramienta une los puntos simétricos para obtener un segundo polígono (figura 4).

Te invito a...

entrar a la página www.edutics.mx/47k para obtener un *software* gratuito de geometría. (Consulta: 21 de enero de 2019).

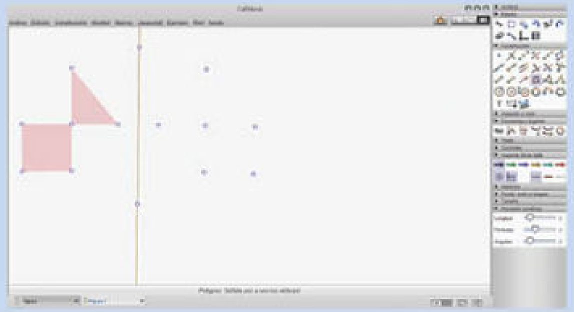


Fig. 3

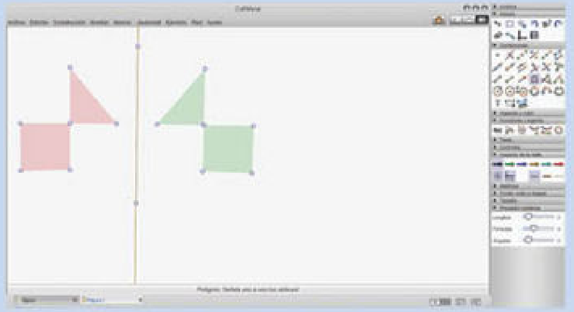


Fig. 4

Ahora selecciona el ícono *Mueve Punto* y modifica la posición de los vértices del polígono original para cambiar su forma.

a) ¿Cómo es el segundo polígono con respecto al original después de modificarlo?

____

b) ¿Qué características del primer polígono se conservan en el segundo? ¿Cuáles no?

____

3. Da clic en el ícono y dibuja una recta paralela a la primera, justo a un costado del segundo polígono, pero sin que lo corte. Repite las instrucciones del paso 2, ahora para los vértices del segundo polígono, y así obtener un tercer polígono (figura 5).

a) ¿Hay algún cambio en el perímetro y en el área del tercer polígono respecto al polígono original? ¿Por qué?

____

b) ¿Qué pasa con las medidas de los ángulos internos en el tercer polígono respecto al primero?

____

c) Haz clic en el ícono , mueve el punto que está sobre la segunda recta y hazlo coincidir con la primera. ¿Qué tipo de transformación permite obtener el tercer polígono a partir del primero?

____

4. Con la herramienta *Semirrecta* dibuja una recta que interseque a la segunda en un solo punto. Luego repite las instrucciones del paso 2, pero ahora para los vértices del tercer polígono y usando como eje la semirrecta, de manera que obtengas un cuarto polígono. Da clic sobre el ícono y traza dos circunferencias: una con centro en la intersección de la segunda recta y la semirrecta, y que un punto de la circunferencia sea el vértice más cercano del cuarto polígono; la segunda con el mismo centro, pero que el punto de la circunferencia sea el vértice más lejano del mismo polígono (figura 6).

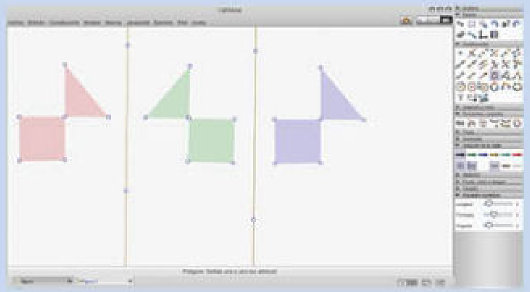


Fig. 5

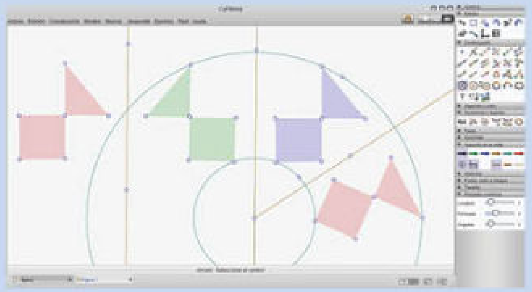


Fig. 6

a) ¿Cambia la forma o el tamaño del cuarto polígono con respecto a los tres anteriores? Fundamenta tu respuesta.

____

b) ¿Qué características del tercer polígono se conservan en el cuarto?

____

c) ¿Cuántos vértices hay sobre cada circunferencia? ______________________________

d) ¿Qué características tienen en común el segundo, tercero y cuarto polígonos?

____

e) Con la herramienta mueve el punto que está sobre la semirrecta; ésta rotará con respecto a la intersección; haz que coincida con el punto de la segunda recta. ¿Qué ocurre con las circunferencias y con el cuarto polígono?

____

5. Con esa misma herramienta elabora un diseño combinando simetría axial y central, rotación y traslación de figuras.

Ponte a prueba PISA

1. A partir de la información de las ilustraciones de la figura 1, determina el peso de papá Oso, mamá Osa y Urso, el pequeño osito.

Fig. 1 237 kg 93 kg 304 kg

2. Se quiere a construir una escalera que tendrá un pasamanos de madera con una longitud de 459.30 cm desde el punto *A* hasta el punto *B*, como muestra la figura 2. La base de la escalera cubrirá una distancia horizontal de 384 cm, y tendrá 12 escalones idénticos, ¿cuál será la altura de cada uno?

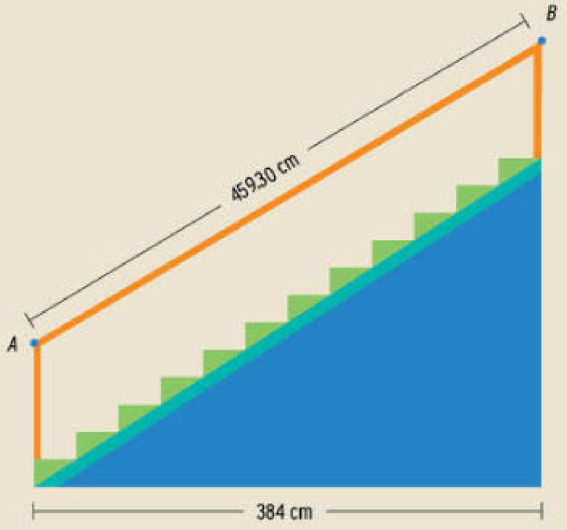


Fig. 2

3. Imagina que el diseño que se muestra en la figura 3 se extiende en todas direcciones y cubre todo un plano. Rota la página 60° sobre el punto *A* y nota cómo el diseño concuerda consigo mismo.

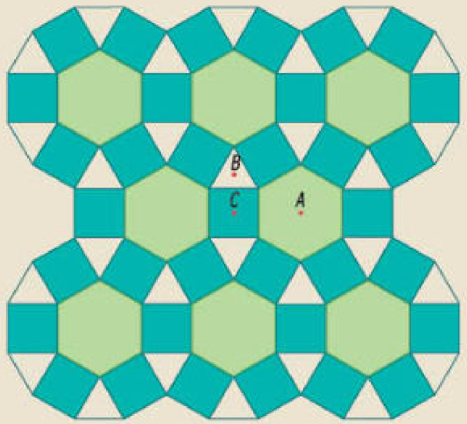


Fig. 3

a) ¿Con qué otros ángulos de rotación centrados en *A* el diseño concuerda consigo mismo?

b) ¿Cuáles son los ángulos de rotación centrados en los puntos *B* y *C* que harán que el diseño concuerde consigo mismo?

4. El siguiente diagrama muestra la división con alambre de púas que Juan hizo en un terreno para cultivar diversas hortalizas. El área que ocuparán las hortalizas está en color azul y los números en cada sección indican la medida de su área. Juan también quiere cercar todo el terreno con alambre de púas. El área total del terreno es de 210 m².

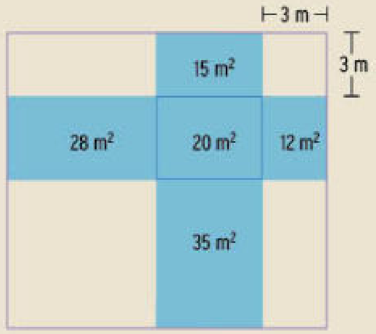


Fig. 4

a) ¿Cuánto mide el área del terreno que no está sembrado con hortalizas?

b) ¿Cuántos metros de alambre de púas necesitará Juan para terminar de cercar el terreno?

Ponte a prueba ENLACE

1. Elige, entre las siguientes opciones, la factorización y las soluciones que corresponden a la ecuación $x^2 - 16x + 63 = 0$.

   a) $(x - 9)(x - 7)$; $x_1 = 9$, $x_2 = 7$

   b) $(x - 9)(x - 7)$; $x_1 = -9$, $x_2 = -7$

   c) $(x + 9)(x + 7)$; $x_1 = -9$, $x_2 = -7$

   d) $(x + 9)(x - 7)$; $x_1 = 9$, $x_2 = -7$

2. Las siguientes son propiedades de la rotación de figuras, excepto:

   a) La figura rotada conserva los mismos ángulos que la figura original.

   b) Se conserva la medida de los lados.

   c) Cada punto de la figura original se rota los mismos grados con relación al punto de rotación.

   d) Los lados de la figura copia son proporcionales a los de la figura original.

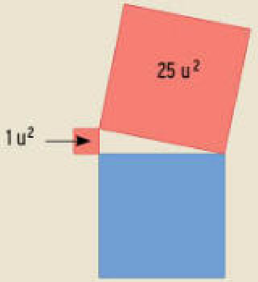
3. Observa la construcción y selecciona la opción que describe las dos transformaciones hechas a la figura de la izquierda para obtener las de la derecha.

   a) Simetría central y traslación.

   b) Simetría central y simetría axial.

   c) Simetría axial y simetría central.

   d) Rotación de 90° y simetría axial.



4. ¿Cuál es el área del cuadrado azul?

   a) 25 u² b) 26 u² c) 24 u² d) 4.89 u²

5. Una escalera que mide 2.75 m se apoya en una pared a 1.12 m de su base. ¿A qué altura de la pared llega la escalera?

   a) 2.96 m b) 1.63 m c) 3.92 m d) 2.51 m

6. Se lanza un dado de veinte caras numeradas y se registra el número de la cara superior después de lanzarlo. Considera los siguientes eventos:

   Evento A: El número obtenido es múltiplo de 5.
   Evento B: El número obtenido es impar.
   Evento C: El número obtenido es divisor de 20.
   Evento D: El número obtenido es primo.

   ¿Qué representa una probabilidad de $1 - \frac{1}{5}$?

   a) $P(A^c)$ b) $P(B^c)$ c) $P(C^c)$ d) $P(D^c)$

Notación
Si A es un evento, entonces su complemento se denota como A^c.

Ahora sé

Autoevaluación

Marca con una ✓ la opción que demuestre tus alcances correspondientes a los aprendizajes esperados y responde la pregunta.

Contenido	¿Logré el aprendizaje? Sí	No	¿Cómo puedo mejorar?
Uso ecuaciones cuadráticas para modelar situaciones y resolverlas usando la factorización.			
Analizo las propiedades de la rotación y de la traslación de figuras.			
Construyo diseños que combinan la simetría axial y central, la rotación y la traslación de figuras.			
Analizo las relaciones entre las áreas de los cuadrados que se construyen sobre los lados de un triángulo rectángulo.			
Explico y uso el teorema de Pitágoras.			
Calculo la probabilidad de ocurrencia de dos eventos mutuamente excluyentes y de eventos complementarios (regla de la suma).			

Al terminar revisa la tabla con tu profesor. Después, en grupo y con el apoyo de su profesor, elaboren una estrategia de trabajo para que mejoren su desempeño.

Eje	Contenido	Aprendizajes esperados
Sentido numérico y pensamiento algebraico	**Patrones y ecuaciones** • Resolución de problemas que implican el uso de ecuaciones cuadráticas. Aplicación de la fórmula general para resolver dichas ecuaciones.	• Resuelve problemas que implican el uso de ecuaciones de segundo grado. • Resuelve problemas de congruencia y semejanza que implican utilizar estas propiedades en triángulos o en cualquier figura.
Forma, espacio y medida	**Figuras y cuerpos** • Aplicación de los criterios de congruencia y semejanza de triángulos en la resolución de problemas. • Resolución de problemas geométricos mediante el teorema de Tales. • Aplicación de la semejanza en la construcción de figuras homotéticas.	
Manejo de la información	**Proporcionalidad y funciones** • Lectura y construcción de gráficas de funciones cuadráticas para modelar diversas situaciones o fenómenos. • Lectura y construcción de gráficas formadas por secciones rectas y curvas que modelan situaciones de movimiento, llenado de recipientes, etcétera.	
	Nociones de probabilidad • Cálculo de la probabilidad de ocurrencia de dos eventos independientes (regla del producto).	

El puente del Alamillo en Sevilla, España, obra del arquitecto Santiago Calatrava, es una muestra de la combinación de la geometría, el arte y la ingeniería en la construcción de obras que ayudan a resolver problemas de la población aunado con el embellecimiento de las ciudades. Los tirantes paralelos del puente cuyo objetivo funcional es el de dar sostén al tablero, asemeja las líneas paralelas que se pueden trazar en un triángulo para formar triángulos menores semejantes entre sí, como afirma el teorema de Tales.

La fórmula infalible

Inicio a partir de lo que sé

En equipos analicen y resuelvan el siguiente problema.

Sonia tiene un terreno que quiere utilizar como jardín para fiestas y eventos sociales; en medio del jardín pretende colocar un piso rectangular cubierto con mosaicos y rodearlo con cenefas como muestra la figura 3.1. Si tiene 46.75 m^2 de mosaico y 28 metros lineales de cenefa, ¿cuáles deben ser las dimensiones del piso para aprovechar el mosaico y la cenefa sin que falte ni sobre alguno de los dos materiales?

a) Formulen una expresión algebraica que represente el problema.

b) Resuelvan la expresión anterior e indiquen su procedimiento para encontrar la solución, así como las dificultades que enfrentaron.

c) ¿Cómo podrían comprobar si su respuesta es correcta?

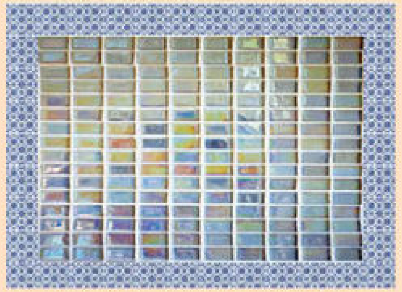


Fig. 3.1

Resuelvo y aprendo

La fórmula general

1. Formen equipos y resuelvan lo siguiente.

a) Calculen las dimensiones de un rectángulo si su largo mide 4 metros más que su ancho y su área es de 45 m^2.

- Formulen una ecuación cuadrática que represente el problema, la cual debe tener un término con la incógnita elevada al cuadrado.

____

- Reescriban la ecuación de modo que uno de los miembros sea igual a cero.

____

- ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo?

____

Toda ecuación de segundo grado o ecuación cuadrática se puede escribir de la siguiente forma: $ax^2 + bx + c = 0$, que se conoce como *forma general de las ecuaciones de segundo grado*, donde a es el coeficiente que acompaña al término cuadrático (x^2) y debe ser distinto de 0 (¿por qué?); b corresponde al coeficiente que acompaña al termino lineal (x), y c es el coeficiente independiente.

b) Identifiquen los coeficientes a, b y c en cada ecuación cuadrática. Realicen las operaciones necesarias para obtener ecuaciones equivalentes que les permitan responder cada situación.

- $4x^2 + 3x + 9 = 0$

Coeficiente cuadrático (a): ______
Coeficiente lineal (b): ______
Coeficiente independiente (c): ______

- $30 = 9x^2$

Coeficiente cuadrático (a): ______
Coeficiente lineal (b): ______
Coeficiente independiente (c): ______

- $x(2x + 7) = 0$

Coeficiente cuadrático (a): ______
Coeficiente lineal (b): ______
Coeficiente independiente (c): ______

- $(x + 1)(x + 9) = 3$

Coeficiente cuadrático (a): ______
Coeficiente lineal (b): ______
Coeficiente independiente (c): ______

- $0 = 2x(5x + 3)$

Coeficiente cuadrático (a): ______
Coeficiente lineal (b): ______
Coeficiente independiente (c): ______

- $(x - 2)(x + 2) = 0$

Coeficiente cuadrático (a): ______
Coeficiente lineal (b): ______
Coeficiente independiente (c): ______

- $190x - x^2 = 67$

Coeficiente cuadrático (a): ______
Coeficiente lineal (b): ______
Coeficiente independiente (c): ______

En grupo expongan sus resultados y procedimientos; compárenlos y determinen si son correctos.

Una forma de resolver ecuaciones cuadráticas en su forma general consiste en aplicar la *fórmula general de las ecuaciones de segundo grado*, que se expresa de la siguiente manera:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

donde a, b y c corresponden a los coeficientes de la forma general. El símbolo $\pm$ se lee "más, menos" y significa que se deben hacer dos operaciones: una sumando la parte de la raíz al valor de $-b$ y otra restándola; es decir, se deben resolver dos ecuaciones para obtener la o las soluciones de la ecuación de segundo grado:

$$x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{y} \quad x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

c) Resuelvan de nuevo el problema a) de la actividad 1 de la página 112 con la fórmula general y comparen su resultado con el que obtuvieron inicialmente. ¿Coinciden sus resultados? ¿Por qué?

Manos a la ecuación

2. En parejas resuelvan los siguientes problemas aplicando la fórmula general.

a) Lucía quiere construir un corredor techado al frente y en la parte derecha de su casa, de manera que en todo su tramo tenga el mismo ancho. Observa la figura 3.2. Si la casa mide 9 m de ancho y 14 m de largo, y la superficie total de la casa con el corredor incluido es 176 m^2, ¿cuánto medirá el ancho del corredor?

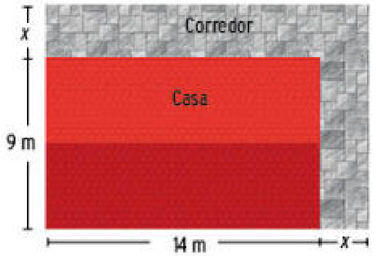


Fig. 3.2

- ¿Cuántas soluciones, de acuerdo con los resultados de la fórmula general, tiene la ecuación cuadrática que plantearon?
- ¿Cuántas soluciones tiene el problema?

b) En una lavandería se necesita construir una rampa para bajar la ropa de la zona de lavado a la de planchado de manera rápida y segura. Para el soporte de la rampa se tienen dos varillas de 7 m de largo que se planean doblar en forma de "L"; la superficie de la rampa es una lámina de acero inoxidable de 5 m de largo que se apoyará en los extremos de las varillas como ilustra la figura 3.3. ¿En qué punto se deben doblar las varillas para hacer los soportes? Las varillas no serán cortadas, sólo dobladas, por lo que la medida de la base de la rampa afecta su altura.

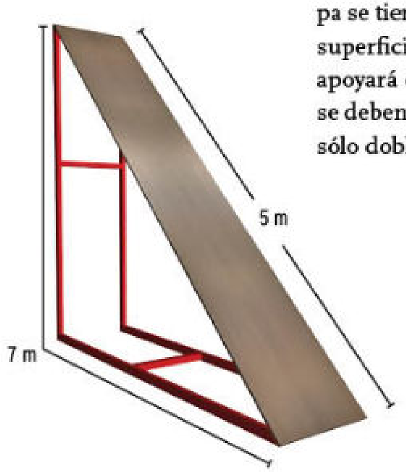


Fig. 3.3

- ¿Cuántas soluciones tiene la expresión algebraica que plantearon de acuerdo con la fórmula general?
- ¿Esas soluciones resuelven el problema? Expliquen.

- En secuencias anteriores aprendieron que una ecuación cuadrática puede tener dos soluciones diferentes. Analicen los problemas de los incisos a) y b) anteriores y respondan en cuáles la ecuación cuadrática tiene dos soluciones diferentes, pero sólo una resuelve el problema.
- En los problemas que mencionaron expliquen por qué no tiene sentido usar como respuesta la otra solución de la ecuación.

En grupo expongan sus respuestas y procedimientos, y verifíquenlos con ayuda de su profesor.

El discriminante de una ecuación cuadrática

3. Formen equipos y resuelvan las siguientes situaciones. Utilicen la fórmula general.

a) Andrés tiene cierta cantidad de dinero, pero debe cuatro veces esa cantidad, y sabe que si consiguiera el cuadrado de lo que tiene más 4 pesos, entonces podría liquidar la deuda. ¿Cuánto dinero tiene Andrés?
- ¿Cuántas soluciones tiene el problema?

b) El producto de dos números consecutivos es 14. ¿Cuáles son esos números?
- Planteen este problema como una ecuación cuadrática y resuélvanla con la fórmula general.
- ¿Cuántas soluciones existen para el problema?

c) Encuentren dos **números opuestos** cuyo producto sea 9.
- Utilicen métodos personales para resolver el problema o, si consideran que no hay solución, expliquen sus razones.
- Planteen una ecuación cuadrática para resolver el problema con la fórmula general; utilicen su calculadora. Anoten sus resultados y observaciones.
- ¿Encontraron alguna dificultad para resolver la ecuación? Si su respuesta es afirmativa, expliquen en qué consiste.

En la fórmula general $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, la expresión $b^2 - 4ac$ que está dentro de la raíz se conoce como *discriminante de la ecuación*.

Números opuestos: son los que sumados dan como resultado 0; también se definen como los números con el mismo valor absoluto, pero diferente signo, o aquellos que en la recta numérica están separados la misma distancia del origen, pero en sentidos opuestos. Ejemplos: 4 y −4, $-\frac{2}{3}$ y $\frac{2}{3}$, π y $-\pi$.

4. En parejas analicen las ecuaciones que plantearon para resolver los problemas anteriores. ¿Cuántas soluciones tuvo cada una?

a) Calculen la raíz cuadrada del discriminante de cada ecuación. ¿Consideran que existe una relación entre el número de soluciones de una ecuación de segundo grado y el resultado de la raíz cuadrada del discriminante correspondiente? Expliquen.

b) Revisen las ecuaciones cuadráticas que han planteado en esta secuencia, calculen el valor del discriminante de cada una, señalen su signo e indiquen cuántas soluciones tiene la fórmula general correspondiente. Con sus resultados completen la siguiente tabla.

Página	Problema	Valor del discriminante ($b^2 - 4ac$)	Signo del discriminante	Número de soluciones
112	a			
114	a			
	b			
115	a			
	b			
	c			

Integración

5. En grupo y con ayuda de su profesor completen los siguientes enunciados de acuerdo con los datos de la tabla.

a) Si el discriminante $(b^2 - 4ac) > 0$, entonces la ecuación tiene ________ soluciones.

b) Si el discriminante $(b^2 - 4ac) = 0$, entonces la ecuación tiene ________________.

c) Si el discriminante $(b^2 - 4ac) < 0$, entonces la ecuación tiene ________________.

6. En parejas propongan una ecuación para cada una de las condiciones siguientes.

a) Una ecuación cuadrática que tenga dos soluciones diferentes.

b) Una ecuación cuadrática con una única solución. ________________

c) Una ecuación cuadrática sin soluciones. ________________

d) Planteen un problema que se resuelva con la ecuación cuadrática $x^2 - 4 = 0$, y que alguna de las soluciones resuelva el problema.

e) Planteen un problema cuya ecuación cuadrática tenga como solución uno de estos dos números: 1 o 7.

Consolido mis aprendizajes

1. En parejas retomen la actividad inicial, resuélvanla planteando una expresión cuadrática y encuentren las soluciones mediante la fórmula general.

a) ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación cuadrática? ¿Las soluciones resuelven el problema inicial? ________________

b) Comparen la solución que obtuvieron al aplicar la fórmula general con la del inicio. ¿Cómo son entre sí? ¿Por qué?

c) ¿Cuáles son las ventajas de usar la fórmula general? ¿Cuáles sus desventajas?

d) ¿En qué casos consideran que es más conveniente usar la fórmula general, factorización, operaciones inversas o métodos personales para resolver problemas que involucren ecuaciones cuadráticas?

2. Supongan que Sofía cuenta con los mismos 28 metros de cenefa para rodear el terreno que cubrirá con el mosaico, pero que las dimensiones del terreno deben cumplir la siguiente condición: numéricamente el cuadrado del ancho es 15 unidades más chico que el área total.

a) ¿Cuáles son las medidas del terreno?

3. Se sabe que la base de un triángulo mide 2 cm más que su altura, y que numéricamente el área es tres veces más grande que la altura. ¿Cuánto mide la base y la altura del triángulo? ¿Cuál es su área?

¡Hágalo con triángulos!

Inicio a partir de lo que sé

Resuelvan en equipos el siguiente problema.

En un momento del día, las sombras de dos edificios contiguos coinciden. Observen la figura 3.4 y respondan.

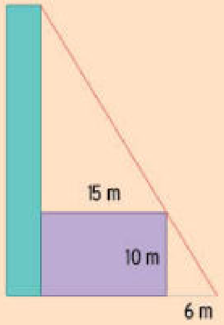


Fig. 3.4

a) ¿Cuál es la altura del edificio más alto?
b) Expliquen el procedimiento que siguieron para hacer el cálculo.

Resuelvo y aprendo

Problemas geométricos con triángulos

1. En equipos realicen las siguientes actividades.
   a) Observen el rombo $ABCD$, cuyas diagonales son $\overline{BD}$ y $\overline{AC}$ y respondan.
   - ¿Los triángulos ADE y ABE son congruentes? ______

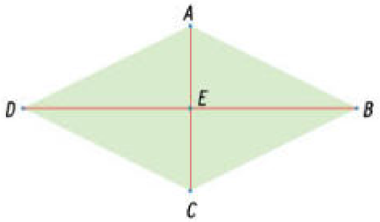


Fig. 3.5

   - ¿Con qué criterio de congruencia pueden demostrar su respuesta?

______

   - Si cada lado del rombo mide 15 cm y el segmento $\overline{AE}$ mide 13.5 cm, ¿cuál es la medida de los segmentos $\overline{DE}$, $\overline{EB}$ y $\overline{EC}$?

______

   - ¿Qué procedimiento usaron para encontrar las medidas?

______

b) Consigan dos hojas de papel tamaño carta. Discutan una estrategia para doblar y recortar una y conseguir que sea semejante a la hoja de tamaño original.
- Dibujen en su cuaderno los dobleces para obtener la hoja semejante.
- ¿Podrán usar el mismo procedimiento para cualquier tamaño de hoja (oficio, media carta, A4, etcétera)? ¿Por qué?

______

______

Comparen sus resultados y procedimientos con otros equipos, y decidan cuáles fueron los más ingeniosos.

2. Realicen la siguiente actividad en parejas.

   a) Observen dos procedimientos incompletos para trazar un polígono semejante a otro. Con apoyo de las escuadras se trazan líneas paralelas a los lados de los polígonos.

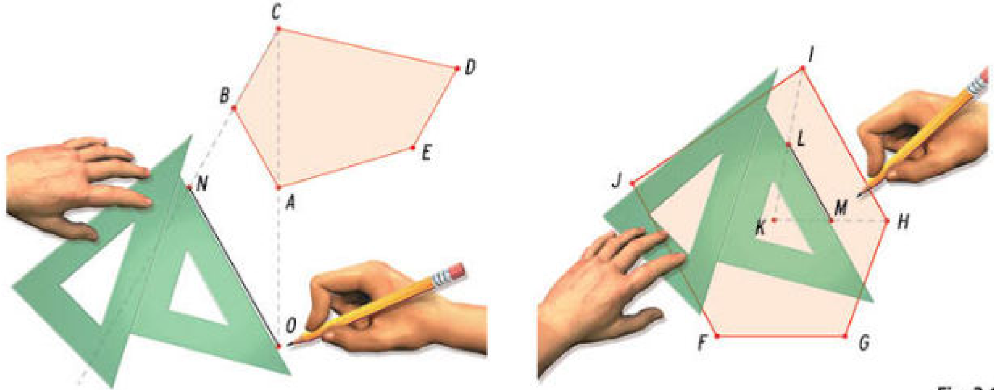


Fig. 3.6

- Expliquen en su cuaderno el procedimiento completo, y justifiquen por qué se puede asegurar que así se obtienen figuras semejantes.
- Completen los procedimientos realizando los trazos necesarios.

b) Observen los siguientes cuadriláteros.

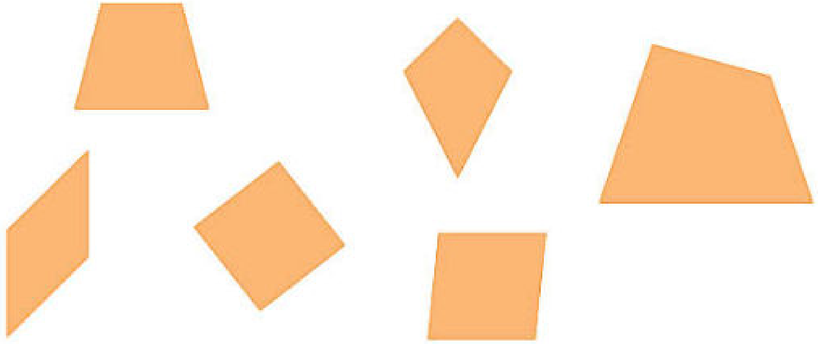


Fig. 3.7

- ¿Con cuáles de ellos, al dividirlos por alguna de sus diagonales, se obtienen dos triángulos congruentes?

- Analicen su respuesta y expliquen qué propiedades deben tener los cuadriláteros para que, al dividirlos por una de sus diagonales, se obtengan dos triángulos congruentes.

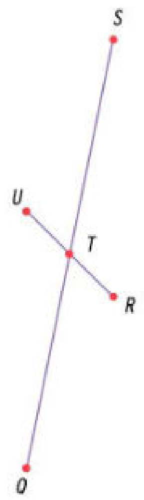


Fig. 3.8

c) Construyan un cuadrilátero a partir de los segmentos de la figura 3.8. Consideren ambos segmentos como diagonales del cuadrilátero que se cortan en sus puntos medios.
- ¿Qué tipo de cuadrilátero trazaron?

- Apliquen sus conocimientos sobre triángulos congruentes, criterios de congruencia, semejanza de triángulos, ángulos que se forman en dos paralelas cortadas por una recta y ángulos opuestos al vértice, para justificar el tipo de cuadrilátero que se forma con los extremos de los segmentos.
- Tracen en sus cuadernos dos diagonales, distintas a las anteriores, que también se corten en sus puntos medios y construyan el cuadrilátero correspondiente. ¿De qué tipo de cuadrilátero se trata?

- Comparen su trabajo con el de otros equipos. ¿Qué tipo de cuadrilátero trazaron sus compañeros?

Integración

3. En grupo y con ayuda de su profesor realicen lo que se pide.

a) Escriban una afirmación que relacione las características del cuadrilátero que formaron con las dos rectas que se cruzan en sus puntos medios y que son las diagonales del cuadrilátero. ¿Esto ocurre para cualquier cuadrilátero con las mismas características?

Cálculo de distancias inaccesibles

4. En parejas realicen la siguiente actividad.

a) Un grupo de ingenieros topógrafos necesita medir el ancho de un río, y para ello colocaron postes en los puntos marcados con las letras *G*, *M*, *J*, *P* y *R*; la distancia entre algunos postes se indica en el diagrama.
- Observa las figuras geométricas que se forman, ¿cómo son entre sí?

- ¿Cuánto mide el ancho del río, es decir, cuál es la distancia entre los postes *P* y *M*? ______
- Expliquen el procedimiento que siguieron para encontrar la respuesta.

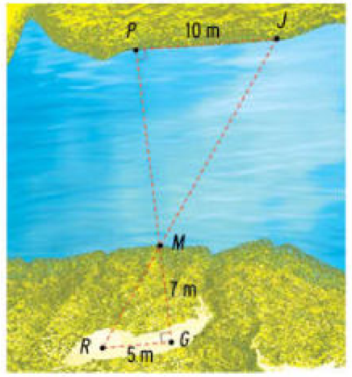


Fig. 3.9

b) Desde la Antigüedad se ha utilizado la proyección de las sombras del sol para calcular la altura de árboles, pirámides o torres, y en general de alturas de objetos que sería muy difícil medir de manera directa. El siguiente esquema muestra la Torre Latinoamericana, ubicada en el centro de la Ciudad de México, y una pequeña casa. Las medidas de la sombra que proyecta la torre, la altura de la casa y la sombra de ésta se pueden calcular de manera directa y son las que se muestran en la figura 3.10. Con esos datos calculen la altura de la Torre Latinoamericana.

Fig. 3.10

- Describan el método que siguieron para calcularla.

- Comparen su procedimiento con el de sus compañeros. ¿Qué criterios utilizaron ustedes y cuáles sus compañeros? ¿Los consideran correctos? ¿Cómo podrían validarlos?

c) Omar vive en El Dorado, un poblado que se encuentra a 2.5 km de distancia de la comunidad La Esmeralda, que se encuentra a 4.5 km de El Paraíso, otro pueblo aledaño a El Dorado. Entre El Dorado y El Paraíso hay una laguna, por lo que no es posible medir directamente la distancia entre ambos, pero se sabe que si se trazara una línea desde La Esmeralda hasta El Dorado y otra de La Esmeralda a El Paraíso, las dos rectas formarían un ángulo de 90° con vértice en La Esmeralda.

- Tracen un esquema que ilustre esta situación.

- ¿Qué distancia hay entre El Dorado y El Paraíso?
- Expliquen el procedimiento que siguieron para obtener la respuesta.
- Comparen su respuesta y procedimiento con los de otros equipos, y valídenlos con apoyo de su profesor. ¿Con cuál se obtuvo un resultado más preciso?

d) Observen el campo de beisbol de la figura 3.11. La distancia entre la primera base y la intersección entre la línea de grama y la línea de *foul* es de 9.5 m.

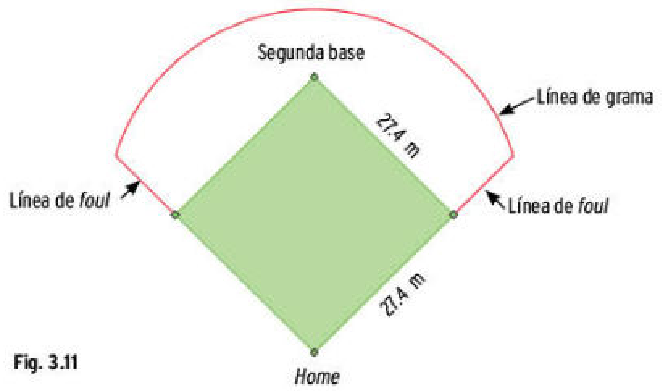


Fig. 3.11

- ¿La información proporcionada es suficiente para resolver el problema?
- ¿Qué información o suposición necesitan para resolverlo?
- ¿Cuál es la distancia entre la segunda base y la intersección de la línea de grama y la línea de *foul* del lado izquierdo?
- Expliquen y justifiquen su procedimiento.

e) En equipo planteen un problema que se pueda resolver combinando semejanza de triángulos y el teorema de Pitágoras. Anótenlo a continuación.

- Intercambien su problema con otro equipo. Resuelvan su problema y el de sus compañeros. Comparen sus procedimientos y resultados y valídenlos con ayuda de su profesor.

Consolido mis aprendizajes

1. En forma individual trabajen lo siguiente.

   a) Resuelve el problema inicial (página 118) a partir de lo que has aprendido en esta secuencia.
   - ¿Cuál es la altura del edificio más alto?
   - Compara este procedimiento con el que seguiste al inicio. ¿Con cuál crees que obtuviste un resultado más preciso?

   b) Si en el problema inicial suponemos que el edificio más alto mide 9 m de ancho y que a la izquierda de éste hay un edificio más alto que los dos anteriores, ¿cuál debería ser su altura para que su sombra coincidiera con la de los otros dos?

2. En un barco que se encuentra en altamar, un marinero en popa observa que la punta del mástil y el punto más alto de un faro coinciden. Calcula la distancia a la que está el barco del faro si se conocen la altura del faro, la del mástil y la distancia de la popa al mástil, como se señala en el esquema.

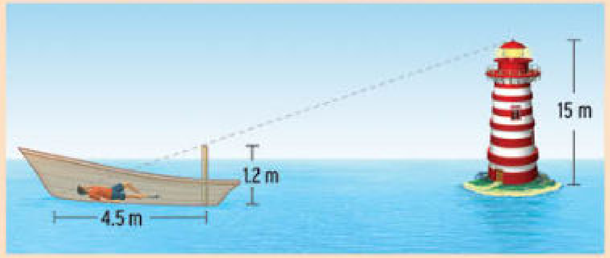


Fig. 3.12

3. Calcula la altura de uno de los árboles más altos de tu escuela. Recaba los datos necesarios y utiliza un procedimiento en el que apliques los criterios de semejanza de triángulos. Exponlo a continuación, valídalo con ayuda de tu profesor y llévalo a cabo. Compara tu resultado con el de tus compañeros y verifiquen si es correcto.

Tales para cuales

Inicio a partir de lo que sé

Resuelvan en equipos el siguiente problema.

El señor Martínez quiere cercar el terreno que se identifica como el lote 2 de la manzana 1 (L2MI) del fraccionamiento Héroes de la independencia, el cual se representa en el croquis. Si los segmentos $\overleftrightarrow{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{EG}$ y $\overline{FH}$ son paralelos entre sí y perpendiculares al segmento $\overline{BF}$, ¿cuántos metros de cerca necesitará?

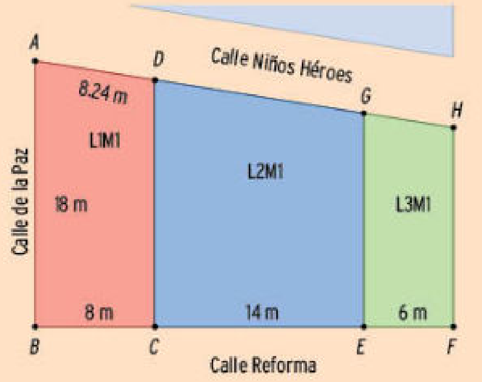


Fig. 3.13

a) ¿Qué procedimiento usaron para calcular la distancia $\overline{DG}$? Expliquen.

b) ¿Qué procedimiento usaron para calcular las distancias $\overline{CD}$ y $\overline{EG}$?

Resuelvo y aprendo

El teorema de Tales

1. En equipos resuelvan la siguiente situación.

a) En el triángulo ABC se trazaron dos rectas paralelas al lado AB, originando los segmentos $\overline{DF}$ y $\overline{EG}$.

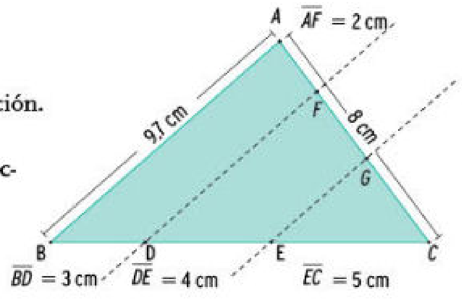


Fig. 3.14

- Observen los triángulos ABC, FDC y GEC que se forman. ¿Cómo son entre sí? Justifiquen su respuesta en su cuaderno.
- Si el segmento $\overline{AB}$ mide 9.7 cm, ¿cuánto miden los segmentos $\overline{DF}$ y $\overline{EG}$?

____

- ¿Cuánto miden los segmentos $\overline{FC}$ y $\overline{GC}$ sabiendo que el segmento $\overline{AC}$ mide 8 cm?

____

- Expliquen el procedimiento que usaron para determinar las medidas.

____

- Determinen las medidas del segmento $\overline{FG}$.

____

- Calculen los siguientes cocientes.

$\frac{\overline{BD}}{\overline{AF}} =$ $\qquad$ $\frac{\overline{DE}}{\overline{FG}} =$ $\qquad$ $\frac{\overline{EC}}{\overline{GC}} =$

- Comparen los resultados. ¿Qué observan?

____

b) Tracen un triángulo cualquiera con dos rectas paralelas a uno de los lados, como en el ejercicio anterior. Intercambien su triángulo con el de otro equipo. Determinen las medidas de los segmentos que se forman entre las dos paralelas y los lados del triángulo, y calculen los cocientes. Anoten sus conclusiones en su cuaderno.

- Comparen sus resultados con los de otros equipos. ¿Qué tienen en común los cocientes en cada triángulo?

____

c) Recapitulen. Completen el enunciado.

Al trazar dos rectas paralelas a uno de los lados de un triángulo que corten los otros dos lados, en ambos lados se forman segmentos ____________ entre sí.

Integración

2. En grupo y con apoyo del profesor completen el siguiente texto.

a) Una generalización de la propiedad que relaciona los segmentos formados por dos rectas paralelas que cortan dos lados de un triángulo es el *teorema de Tales*, el cual se enuncia de la siguiente manera:

Si dos rectas cualesquiera se cortan por una serie de rectas paralelas, cada uno de los segmentos determinados en una de las rectas es ________________ al segmento correspondiente en la otra recta.

Por ejemplo:

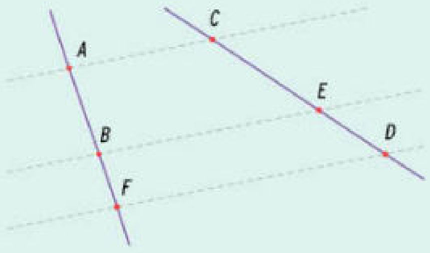


Fig. 3.15

- El segmento $\overline{AB}$ es proporcional al segmento ____________.
- El segmento ______ es proporcional al segmento ____________.
- El segmento $\overline{AF}$ es proporcional al segmento ____________.

3. Formen parejas y resuelvan los siguientes problemas.

a) En la siguiente construcción geométrica, los segmentos $\overline{NO}$, $\overline{PT}$, $\overline{QU}$ y $\overline{SV}$ son paralelos entre sí. Encuentren las medidas que se especifican en el cuadro y justifiquen cada resultado.

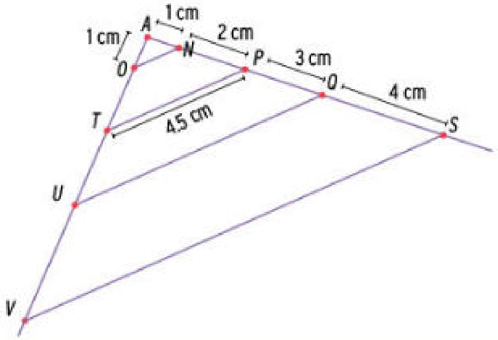


Fig. 3.16

Segmento	Medida	Justificación
$\overline{OT}$		
$\overline{TU}$		
$\overline{UV}$		
$\overline{NO}$		
$\overline{PT}$		
$\overline{QU}$		
$\overline{SV}$		

b) En la siguiente figura, las rectas $\overline{AB}$, $\overline{HI}$, $\overline{FE}$ y $\overline{DG}$ son paralelas. Calculen las distancias:

- $\overline{IE}$ = ____________
- $\overline{EG}$ = ____________

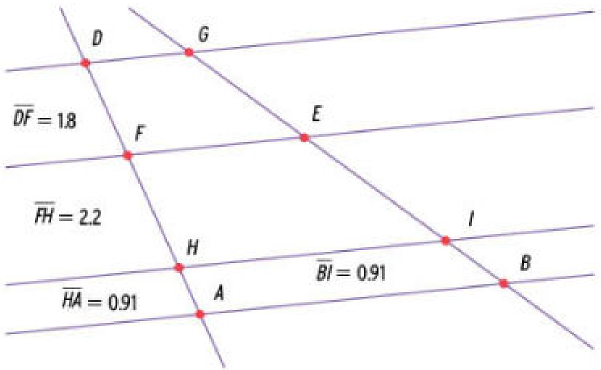


Fig. 3.17

Comparen sus resultados con los de otros equipos y verifíquenlos aplicando el teorema de Tales.

División de un segmento en partes iguales

4. En equipos consigan un palito de madera delgado, un bolígrafo, una hoja de cuaderno de rayas y una regla.

a) Coloquen el palito inclinado sobre la hoja rayada, de modo que sus extremos coincidan con dos líneas del cuaderno. Observen la figura 3.18.

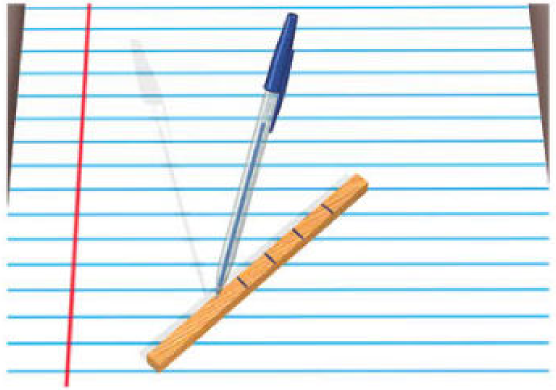


Fig. 3.18

b) Marquen con el bolígrafo los puntos donde las líneas del cuaderno coinciden con el largo del palito.

- Midan la distancias entre cada marca. ¿Cómo son entre sí?

____

- Justifiquen el resultado a partir del teorema de Tales. Consideren que las líneas del cuaderno son equidistantes y paralelas.

____

____

____

Equidistantes: que se encuentran a la misma distancia.

5. En parejas dividan la recta $\overline{AB}$ en ocho partes iguales y la recta $\overline{FG}$ en cinco, utilicen el método anterior. Expliquen sus procedimientos.

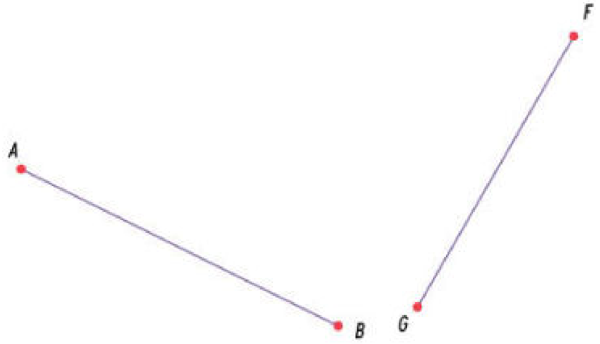


Fig. 3.19

6. Un procedimiento experto para dividir una recta en n partes iguales es el siguiente. Analícenlo en parejas y reprodúzcanlo en su cuaderno utilizando su juego de geometría.

a) Tracen un segmento de recta $\overline{AB}$. En la figura 3.20 puedes ver un ejemplo.
b) Tracen una semirrecta $\overline{AC}$ que forme un ángulo cualquiera con el segmento $\overline{AB}$. El punto A es común a ambas rectas.
c) Tracen con el compás arcos de una medida cualquiera, iniciando en el punto A; consecutivamente, los arcos deben iniciar en los puntos de intersección de cada arco anterior con la semirrecta. Tracen tantos arcos como el número de partes en que quieran dividir el segmento $\overline{AB}$.
d) Unan con una recta el punto B con la intersección de la semirrecta y el último arco, y luego tracen paralelas que pasen por los puntos de intersección entre la semirrecta y el resto de los arcos; las paralelas deben cortar el segmento $\overline{AB}$. Los puntos de corte señalan las divisiones del segmento.

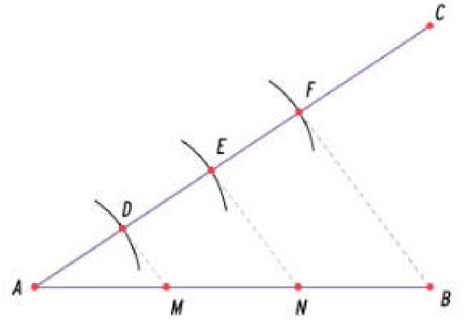


Fig. 3.20

- ¿Por qué funciona este procedimiento? Expliquen.

- ¿El método seguiría siendo válido si el segmento y la semirrecta formaran un ángulo distinto? ¿Y si cambiaran la abertura del compás? Justifiquen sus respuestas.

Compartan en grupo sus respuestas a las actividades 4 y 6 y, con ayuda de su profesor, concluyan cómo dividir un segmento de recta aplicando el teorema de Tales.

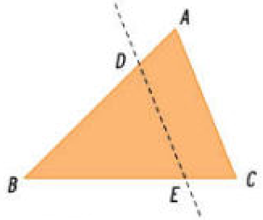


Fig. 3.21

El teorema de Tales recibe su nombre en honor a *Tales de Mileto*, filósofo griego de la Antigüedad que vivió en el siglo VI a. n. e. Tales enunció el teorema al analizar las propiedades de las rectas paralelas y su relación con los triángulos semejantes. Observó que al trazar una recta paralela a uno de los lados de un triángulo, se obtiene un nuevo triángulo semejante al primero y, por tanto, sus lados son proporcionales al original.

$$\Delta ABC \approx \Delta DBE$$

De ahí se obtiene el teorema de Tales, tal como lo has estudiado en esta secuencia.

Aplicación del teorema de Tales

7. En parejas resuelvan los siguientes problemas y valídenlos en grupo con ayuda de su profesor.

a) Una antena se instalará sujetándola con 12 cables tensores, tres orientados a cada uno de los puntos cardinales. Cada cable tensor debe ser paralelo a los otros dos del mismo punto cardinal, como se muestra en la figura 3.22. Respondan con base en la información de la imagen.

- ¿A qué distancia de la base de la antena se encuentra el punto N?

- ¿A qué distancia de la base de la antena está el punto O?

- ¿Cuál es la distancia entre los puntos O y K?

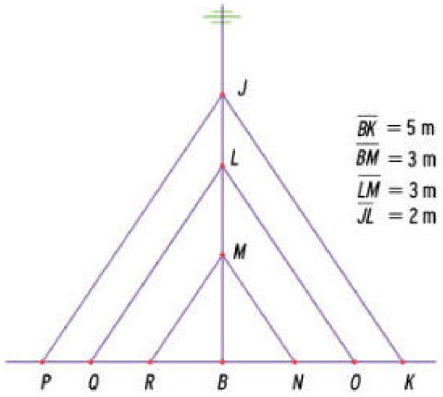


Fig. 3.22

b) A partir del teorema de Tales dividan el siguiente segmento en dos partes, de manera que una de ellas mida el doble que la otra.


Fig. 3.23

c) Expliquen en su cuaderno cómo utilizar el método de la hoja rayada para dividir un segmento en dos partes donde sus longitudes mantengan una razón de 2 a 3.

Consolido mis aprendizajes

1. De manera individual resuelve los siguientes problemas.

a) Utiliza el teorema de Tales para resolver el problema inicial (página 124). Compara tu resultado y procedimiento con los del principio. ¿Fueron correctos? ¿Cuál es más exacto?
b) Observa la siguiente figura. Considera que cada cuadro tiene un área de 1 u^2 y, sin necesidad de medir, encuentra las longitudes de los segmentos.

- $\overline{AH}$ = ____________
- $\overline{DH}$ = ____________
- $\overline{FJ}$ = ____________
- $\overline{JC}$ = ____________

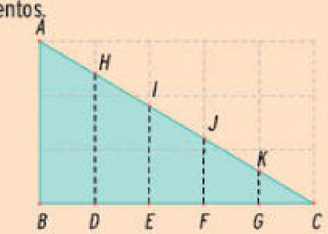


Fig. 3.24

Te invito a...

visitar las siguientes direcciones electrónicas:
www.edutics.mx/4nC
www.edutics.mx/4nj
en ellas encontrarás modelos interactivos para el teorema de Tales. (Consulta: 21 de enero de 2019).

Dadme un punto de apoyo... y transformaré la figura

Inicio a partir de lo que sé

Resuelvan en equipos el problema siguiente.

En la clase de Artes, el equipo de Karina planea presentar una obra de teatro basada en la obra *Drácula* de Bram Stoker. Para dar más realismo a su presentación, planean proyectar sombras de murciélagos de cartón, como el de la figura 3.25.

Cuando la figura original está a 10 cm de distancia del proyector, sobre la pared se ve un murciélago 10 veces más grande.

Fig. 3.25

a) ¿A qué distancia deberán colocar el murciélago si quieren que la proyección sea cinco veces más grande que la original?

b) ¿Y para que sea 12.5 veces más grande?

Resuelvo y aprendo

Imágenes en un proyector

1. En equipos analicen las imágenes que se producen con un proyector.

Material

- Una fuente de luz: linterna de mano, vela o foco incandescente.
- Una pantalla, puede ser una pared blanca o un lienzo de tela sobre una pared.
- Diferentes objetos planos para proyectar.

Fig. 3.26

Procedimiento

1. Dirijan la fuente de luz hacia la pantalla.
2. Coloquen un objeto entre la fuente de luz y la pantalla; observen la sombra que se proyecta.
3. Modifiquen las distancias a las que colocaron la fuente de luz y el objeto, respecto a la pantalla.

Análisis de resultados y conclusiones

- ¿Cómo son las imágenes que se forman sobre la pantalla en relación con la forma de las imágenes que se colocan frente a la linterna? Es decir, indiquen si son semejantes, congruentes, distintas, etcétera. ______
- ¿Qué sucede a la imagen si acercan el objeto a la fuente de luz?, ¿se modifica su tamaño?, ¿se modifica su forma? ______

- ¿Y si alejan el objeto de la fuente de luz? ______
- ¿Qué sucede con la sombra si cambian la posición de la fuente de luz con respecto al objeto? ______
- Tracen en su cuaderno un esquema que represente la forma en que se proyectan las sombras a partir de la fuente de luz y del objeto. Recuerden que la luz siempre viaja en línea recta.

Homotecia

2. En equipos trabajen las siguientes actividades.

a) La figura 3.27 muestra dos pentágonos irregulares semejantes a los que se han trazado líneas auxiliares que unen los vértices correspondientes. Tracen las líneas para los vértices faltantes y respondan.

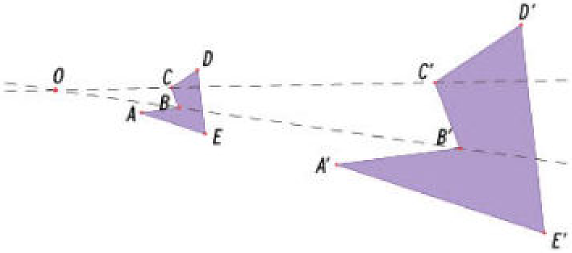


Fig. 3.27

- ¿Cuál es la razón de semejanza de las figuras? ______
- ¿Qué tienen en común las líneas que unen vértices correspondientes? ______
- Midan la distancia entre el punto O y el punto A. ______
- Midan la distancia entre el punto O y el punto A'. ______
- Calculen el cociente $\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$ = ______
- Midan la distancia entre el punto O y el punto B. ______
- Midan la distancia entre el punto O y el punto B'. ______
- Calculen el cociente $\frac{\overline{OB'}}{\overline{OB}}$ = ______
- Midan la distancia entre el punto O y el punto C. ______
- Midan la distancia entre el punto O y el punto C'. ______
- Calculen el cociente $\frac{\overline{OC'}}{\overline{OC}}$ = ______
- ¿Qué observan en los cocientes anteriores? ______
- ¿Esta relación se cumplirá para el resto de los puntos? Justifiquen su respuesta. Sugerencia: apliquen los criterios de semejanza entre triángulos. ______
- ¿Qué relación existe entre los cocientes que calcularon y la razón de semejanza entre los pentágonos? ______

b) Tracen en su cuaderno dos polígonos semejantes.

- Al igual que en la actividad anterior, unan sus vértices correspondientes con líneas rectas extendidas.
- Si hay un punto de intersección entre las líneas que unen vértices correspondientes, midan la distancia entre este punto y los vértices de las figuras.
- ¿Qué relación hay entre la distancia del punto de intersección a los vértices de la primera figura con respecto a la distancia del punto de intersección a los vértices correspondientes en la segunda figura?

___

- Calculen la razón de semejanza entre las figuras y compárenla con la razón anterior. ¿Qué observan? ___

Comparen sus figuras y respuestas con las de otros equipos y observen qué tienen en común sus construcciones.

Integración

3. En grupo y con ayuda de su profesor respondan.

a) Si trazaran rectas que unieran los puntos de dos figuras con simetría traslacional, es decir, cuya razón de semejanza sea 1, ¿estas coincidirían en un punto como en los casos anteriores? ¿Por qué?

___

b) Describan qué ocurre al unir con líneas rectas los puntos correspondientes de figuras semejantes, cuya razón de semejanza es diferente de uno.

___

Con las propiedades que acaban de trabajar es posible construir figuras semejantes, y el resultado se puede ver como la transformación de una figura en otra. Esa transformación se llama *homotecia*. Al punto de intersección de las rectas que unen vértices semejantes se denomina *centro de homotecia*.

4. En parejas utilicen esas mismas propiedades para realizar las siguientes actividades.

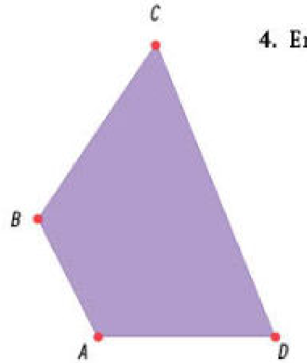


Fig. 3.28

a) Construyan un polígono semejante al de la figura 3.28, cuyos lados midan un cuarto de la longitud de los lados correspondientes en la figura original. Utilicen el punto *O* como centro de homotecia.

- Expliquen su procedimiento.

___

___

___

b) Observen las siguientes estrellas y realicen lo que se indica.

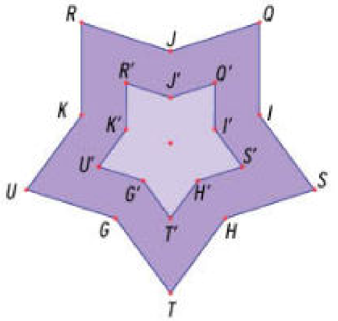


Fig. 3.29

- Identifiquen el centro de homotecia y la razón de semejanza.

___

c) Observen que ahora las estrellas están en diferente posición.

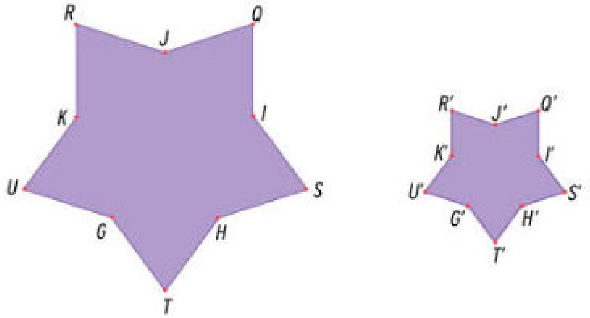


Fig. 3.30

- Identifiquen el centro de homotecia y calculen la razón de semejanza.

___

- ¿Qué semejanzas y diferencias encuentran en las dos actividades anteriores?

___

d) Construyan dos figuras semejantes al polígono *ABCDEF* a partir de los puntos *A'* y *A''* mediante las propiedades de homotecia y considerando al punto *O* como centro de homotecia.

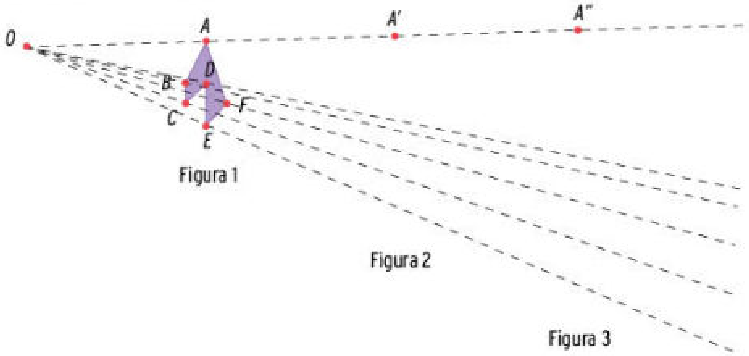


Fig. 3.31

- ¿Cuál es la razón de semejanza entre los polígonos $ABCDEF$ y $A'B'C'D'E'F'$?

- ¿Cuál es la razón de semejanza entre los polígonos $A'B'C'D'E'F'$ y $A''B''C''D''E''F''$?

- ¿Cuál es la razón de semejanza entre los polígonos $ABCDEF$ y $A''B''C''D''E''F''$?

- ¿Qué relación existe entre las razones anteriores? ____________

  En su curso de Matemáticas 1 analizaron el efecto de la aplicación sucesiva de factores constantes de proporcionalidad en situaciones dadas. ¿Qué relación existe entre dicho efecto y las razones anteriores? ____________

Cámara oscura

5. En equipos construyan una cámara oscura y analicen las imágenes que se producen en su interior.

Fig. 3.32

Fig. 3.33

Fig. 3.34

Fig. 3.35

Material

- Un caja
- Papel albanene
- Pintura vinílica negra mate
- Lámina delgada de aluminio, como la de los recipientes para hornear.
- Cinta adhesiva, brocha, cúter y aguja.

Procedimiento

1. Pinten el interior de la caja.
2. En la cara posterior de la caja recorten un rectángulo dejando una orilla de 2 cm de ancho. Observen la figura 3.32.
3. Cubran el hueco con el papel albanene (figura 3.33).
4. En el centro de la cara anterior recorten un cuadrado de 2 cm × 2 cm.
5. Cubran el cuadrado con el aluminio y con la aguja hagan un pequeño orificio en el centro (figura 3.35).
6. Cierren la caja y cubran los orificios con cinta adhesiva para que no entre luz.
7. Dirijan la caja (con el orificio pequeño hacia el frente) hacia algún objeto iluminado y observen la imagen que se proyecta en el papel albanene.

Análisis de resultados y conclusiones

- ¿Cómo son las imágenes que se forman en el papel albanene en relación con las imágenes que se colocan frente a la caja? ____________
- Acerquen y alejen la caja del objeto iluminado y observen cómo cambia la imagen proyectada. Escriban sus observaciones. ____________

- Dibujen en su cuaderno un esquema de cómo los rayos de luz que provienen del objeto atraviesan el orificio y se proyectan en la caja. Pidan asesoría al profesor de Ciencias.

Homotecia con razón negativa

6. En parejas construyan la siguiente homotecia.

   a) Completen la homotecia de la letra F de la figura 3.36.
   - ¿La figura que obtuvieron es semejante a la original? ¿Por qué? ____________
   - ¿Cuál es la diferencia entre esta homotecia y las anteriores? ____________
   - Calculen la razón de semejanza con el mismo procedimiento. ____________

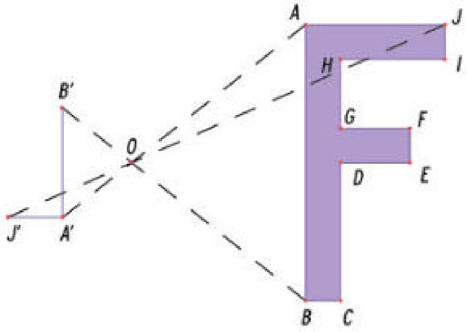


Fig. 3.36

Cuando el centro de homotecia queda entre los puntos correspondientes de figuras semejantes al unirlos con una línea, se dice que la razón de semejanza es *negativa*.

Consolido mis aprendizajes

1. De manera individual resuelve los siguientes problemas.

   a) Retoma el problema inicial de la página 130. Cuando la figura original está a 10 cm de distancia del proyector, sobre la pared se ve un murciélago 10 veces más grande. ¿Cuál es la distancia entre el proyector y la pared? ____________
   - ¿A qué distancia del proyector colocarías el murciélago si quieres que la proyección sea cinco veces el tamaño del original? ____________
   - ¿Y si se necesita que el tamaño sea 12.5 veces el del original? ____________

2. Traza en tu cuaderno un triángulo rectángulo y realiza una homotecia para construir un triángulo semejante tres veces mayor.
3. Traza una figura cualquiera y construye su homotecia con una razón de −1.
   a) ¿Cómo es la figura que obtuviste con relación a la original?
   b) ¿Con qué otras transformaciones podrías obtener la misma figura simétrica?
4. Traza un heptágono irregular y su homotecia con razón $-\frac{3}{2}$.
   - Identifica los vértices y lados semejantes. ¿Qué proporción existe entre sus áreas?
5. Identifica en tu entorno y en instrumentos u objetos de uso cotidiano situaciones en las que se utilicen o reproduzcan imágenes homotéticas. Compártelas en grupo.

Te invito a...

visitar las siguientes direcciones electrónicas:
www. edutics.mx/4nK
www.edutics.mx/4nr
donde encontrarás distintas actividades sobre semejanza y homotecia. (Consulta: 21 de enero de 2019).

Gráficas de relaciones cuadráticas

Inicio a partir de lo que sé

En parejas analicen la siguiente situación y respondan.

Doña Elena tiene una pequeña fábrica de galletas, y como sus recursos son limitados en términos de espacio de trabajo, almacenamiento, herramientas y utensilios, lleva un registro de la productividad en relación con el número de empleados que contrata, todo con la idea de optimizar la producción. Completen la siguiente tabla, que muestra algunos datos de doña Elena. Observen cómo cambia la producción y sigan ese patrón.

Número de trabajadores	Producción (galletas/hora)
0	0
1	50
2	90
3	120
4	140
5	150
6	
7	

Fig. 3.37

a) Consideren los datos de la tabla como pares ordenados (trabajadores, producción) y represéntenlos en el plano cartesiano. Unan esos puntos trazando una línea curva.

- ¿Con base en la gráfica que construyeron dirían que la producción es directamente proporcional al número de trabajadores? ¿Por qué?
- ¿Qué pasaría si el número de empleados continúa aumentando?
- Señalen y expliquen algunas causas que justifiquen el cambio en la producción con relación al aumento de trabajadores.
- ¿Cuál es la cantidad óptima de trabajadores para obtener la mayor producción? Justifiquen su respuesta.

Resuelvo y aprendo

Representación gráfica de funciones cuadráticas

1. En equipos resuelvan las siguientes situaciones.

a) En esta actividad formarán cuadrados en un geoplano.

Material

- Un cuadrado de papel ilustración o una tabla de 15 cm por lado.
- 40 clavos de $\frac{1}{2}$ pulgada
- Una escuadra graduada
- Una liga grande
- Un martillo

Procedimiento

1. Tracen un cuadrado de 10 cm por lado en el centro del papel ilustración o de la tabla.
2. Coloquen los clavos en el perímetro del cuadrado, de manera que queden separados 1 cm entre sí, y que haya uno en cada vértice del cuadrado.
3. Identifiquen del 0 al 10 las posiciones de los clavos en cada lado, comenzando por un vértice, de modo que la lectura siempre sea en el sentido horario como muestra la figura 3.38.
4. Seleccionen un número entero entre 0 y 10 y tensen la liga rodeando los cuatro clavos de cada lado del cuadrado con el número elegido (la figura 3.38 ilustra cómo luce la liga cuando se elige el número 3).

Análisis de resultados y conclusiones

- ¿Qué tipo de cuadrilátero forma la liga? ____________________
- ¿Si eligen otro número se formará el mismo tipo de figura? ____________________
- Justifiquen su respuesta a partir de sus conocimientos de geometría.

____

____

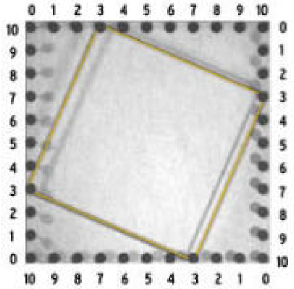


Fig. 3.38

Discutan sus argumentos con otros equipos. Sólo al final, usen regla y transportador para corroborar sus respuestas.

- ¿Cuál es el área del cuadrilátero que formaron con la liga? Sugerencia: observen la figura que se forma con los clavos en línea y la liga. ____________________
- Comparen su resultado con el de otros equipos. ¿Cómo varía el área en relación con el número del clavo donde colocaron la liga? ____________________
- Completen la tabla. Relacionen la posición, x, de los clavos donde colocaron la liga con el área del cuadrilátero formado, $A(x)$. Tracen los puntos $(x, A(x))$ en el plano cartesiano y construyan una curva que los una. ¿Qué forma tiene la gráfica?

x	Área $A(x)$ (cm^2)
0	100
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	

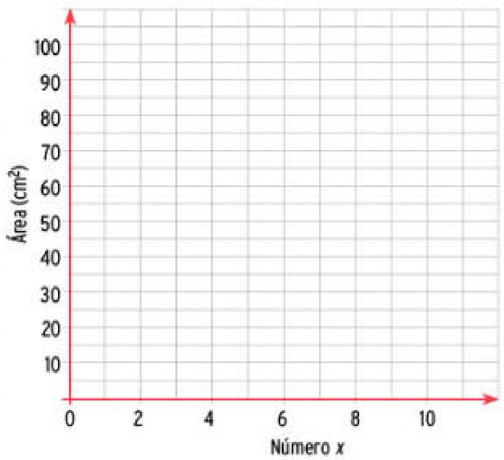
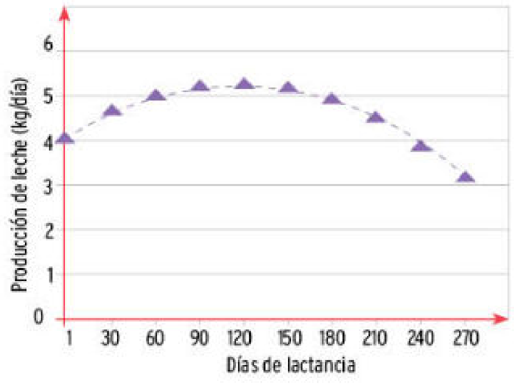


Fig. 3.39

- En grupo expongan sus procedimientos para obtener las áreas y valídenlos con apoyo de su profesor. Elijan el que consideren más adecuado.
- Observen las figuras que forman los clavos en línea y las ligas que forman el cuadrado. ¿De qué figuras se trata? __________
- Expresa los lados de esta figura en términos de x. __________
- Propongan una expresión algebraica para calcular el área del cuadrilátero que forma la liga en términos del número x.
- ¿Cómo cambia el área del cuadrilátero que forma la liga al variar el número x y cómo se aprecia este cambio en la gráfica?
- ¿Es posible formar con la liga cuadriláteros de áreas iguales eligiendo números distintos? Señalen con qué números se obtienen áreas iguales. __________
- ¿El área del cuadrilátero que forma la liga alcanza un valor mínimo, máximo o ambos? Indiquen para qué valores de x ocurre esto. __________
- Por la forma en que se ha construido el geoplano, x no puede tomar valores mayores a 10. ¿La expresión algebraica que obtuvieron es consistente con este hecho? Expliquen. __________
- Analicen la tabla y la gráfica, decidan en cada una si se puede hablar de simetría. Expliquen su respuesta. __________



Fuente: http://revista.corpoica.org.co/index.php/revista/article/view/163F

Fig. 3.40

Discutan su respuesta con otros compañeros y con su maestro.

b) La ganadería bovina de doble propósito consiste en la producción de carne y leche, combinando el ordeño con el amamantamiento de los becerros hasta el destete. Para mejorarla, los investigadores agropecuarios construyen modelos matemáticos que faciliten la toma de decisiones relacionadas con el manejo del ganado. Aquí se muestra la gráfica llamada "curva de lactancia", construida a partir de registros de la producción diaria de leche durante la lactancia. Analícenla y respondan.

- ¿Entre qué valores está la producción diaria de leche?
- ¿Cuál fue la producción en el primer día de lactancia?
- El sistema óseo de los becerros alcanza su máximo desarrollo entre los 90 y 120 días. ¿Observan alguna relación entre este dato y la información que aporta la gráfica?
- De acuerdo con la gráfica, ¿en qué día, aproximadamente, ocurre la producción máxima de leche?
- La expresión algebraica que corresponde a la situación tiene la forma $Y_t = \alpha + \beta_1 t - \beta_2 t^2$, donde Y_t es la producción de leche en el día t, y α, β_1, β_2 son parámetros (cantidades constantes), con $\beta_2 < \beta_1$ muy pequeños. Los investigadores plantean que β_1 es el factor relacionado con el aumento en la producción que predomina durante los primeros 120 días del periodo, mientras que β_2 refleja la disminución diaria de la producción, que predomina en los siguientes días. ¿Este planteamiento es razonable? ¿Cómo se relacionan estos parámetros con el valor de t y la producción de leche?
- ¿Qué relación observan entre la expresión algebraica de la producción de leche y la forma general de las ecuaciones de segundo grado? Expliquen.
- ¿Consideran que la gráfica representa información sobre un solo animal o es el promedio de la producción de cierto número de ellos? ¿Qué sería más útil?

c) En su curso de Ciencias 2 estudiaron el movimiento de caída libre y aprendieron que la ecuación que relaciona la distancia que recorre un objeto en este movimiento y el tiempo de caída es cuadrática. La figura 3.41 muestra la gráfica de esta relación.

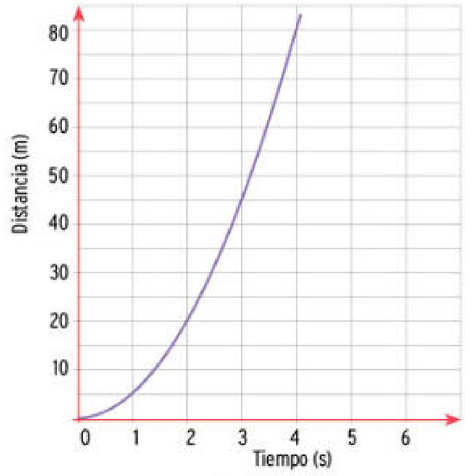


Fig. 3.41

- De acuerdo con la gráfica, ¿qué distancia recorre un objeto a los dos segundos de haberlo soltado? ____________________
- Si un objeto ha recorrido 45 m, ¿cuánto tiempo habrá transcurrido desde que se soltó?

____

- ¿Qué distancia ha recorrido a los 0 segundos? ____________________
- Si la relación entre la distancia recorrida y el tiempo es cuadrática, entonces debe tener la forma de la ecuación general de segundo grado, es decir, de la forma:

$$d = at^2 + bt + c$$

donde d es la distancia recorrida y t, el tiempo transcurrido.

Te invito a...

visitar la página electrónica: www.edutics.mx/4fN donde observarás cómo varía la gráfica de una función cuadrática, $y = ax^2 + bx + c$, al variar los parámetros a, b o c, y dejar fijos los demás. (Consulta: 21 de enero de 2019).

- Sustituyan en la ecuación anterior los datos obtenidos en las preguntas anteriores para distancias y tiempos.

Para $t = 0$ ______ $= a(0)^2 + b(0) + c$ Por tanto $c =$ ______

Para $t = 2$ ______ $= a$ ______ $^2 + b$ ______ $+ c$

Para $t = 3$ ______ $= a$ ______ $^2 + b$ ______ $+ c$

- Calculen los valores de a, b y c. En su curso de Matemáticas de segundo grado aprendieron a resolver sistemas de ecuaciones 2×2. ¿Cómo pueden utilizar esos procedimientos para obtener estos valores?

____

____

- De acuerdo con su respuesta anterior escriban la expresión algebraica que relaciona la distancia que recorre un objeto en caída libre y el tiempo.

____

____

En grupo compartan sus respuestas y procedimientos y valídenlos con ayuda de su profesor.

Integración

2. En grupo y con ayuda del profesor completen los enunciados.

a) Cuando una situación se puede modelar mediante una función cuadrática, su gráfica tendrá la forma de ____________________

b) En la representación ____________ de una relación cuadrática es más fácil observar si existen valores máximos o mínimos.

Consolido mis aprendizajes

1. En parejas respondan las siguientes cuestiones.

a) Vuelvan a la situación inicial y planteen una expresión algebraica que la modele.

____

- ¿Tiene sentido considerar números negativos en este modelo?

____

- ¿En este modelo se podría considerar cualquier número (positivo) de personas? Si la respuesta es negativa, ¿hasta qué número de personas es razonable tratar? Si la respuesta es positiva, justifíquenla.

____

____

b) A partir de la expresión algebraica que obtuvieron para la producción de galletas, cuando $t = 11$, $P =$ ______. ¿Esto es razonable en la realidad? ____________________

Comenten y discutan sus conclusiones con sus compañeros y valídenlas con apoyo del profesor.

2. En la actividad 1 de la sección Resuelvo y aprendo, a partir de la gráfica construida podemos proponer una expresión $A(x) = ax^2 + bx + c$ que modele el área de los cuadriláteros construidos con la liga y el geoplano.

a) Sabiendo que cuando $x = 0$, $A(0) = 100$, concluimos que $c =$ ____________.

b) Calculen los valores de a y b.

- Entonces, la expresión buscada es $A(x) =$ ___ x^2 ___ $x +$ ___. ¿Es congruente esta expresión con la que obtuvieron anteriormente? ____________________

c) ¿El punto (3.5, 54.5) pertenece a la gráfica que trazaron en el inciso a) de la actividad 1? ¿Qué sentido o interpretación se le puede asignar a ese punto?

____

d) ¿El punto (3, 54) pertenece a la misma gráfica? Expliquen su respuesta.

____

3. En equipo propongan una ecuación cuadrática cualquiera.

____

a) Elaboren su gráfica y planteen una situación que se represente con ella.

b) Compartan con otro equipo la gráfica y la situación, luego pidan que obtengan la expresión algebraica. Al final validen sus resultados.

Te invito a...

En la sección Herramientas digitales de la página 153, te invitamos a utilizar un *software* con el que relacionarás las gráficas de las relaciones cuadráticas con su ecuación.

Con rectas y curvas

Inicio a partir de lo que sé

En parejas analicen la siguiente situación y resuelvan lo que se pide.

Silvia y Bruno prepararon, para su clase de Ciencias, una exposición sobre distintos esquemas de evolución del Universo (incluyendo algunos ya descartados por los cosmólogos actuales, pero de cierto interés histórico). Hicieron gráficas que muestran cómo cambia el radio del Universo con el tiempo.

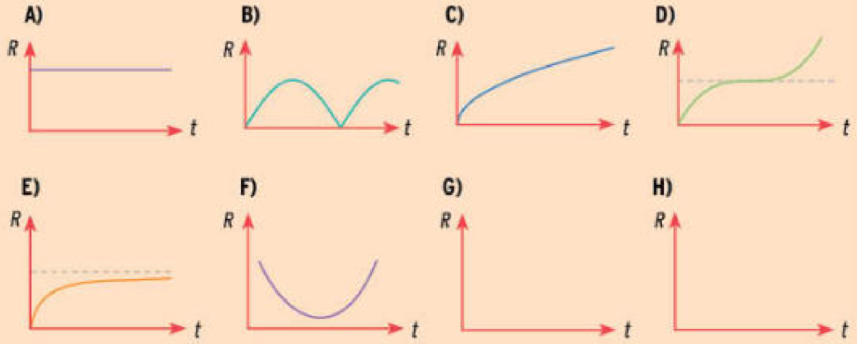


Fig. 3.42 Modelos de evolución del Universo; el eje horizontal representa el tiempo y el eje vertical, el radio del Universo.

a) Completen la tabla relacionando las gráficas con sus descripciones. Bosquejen las gráficas de los modelos III y V.

Modelo	Descripción	Gráfica
I	El Universo primero se comprime y después se dilata.	
II	Universo abierto: se expande sin límite.	
III	Universo cerrado: primero se expande y después se contrae.	H)
IV	Universo pulsante: se expande y se contrae una y otra vez.	
V	El Universo se expande de manera directamente proporcional al tiempo.	G)
VI	El Universo se expande cada vez más lento, aproximándose a un radio límite.	
VII	Universo estacionario: su tamaño siempre permanece igual.	
VIII	El Universo se expande, permanece estacionario cierto tiempo y después continúa su expansión.	

b) Si *R* corresponde a la altura a la que se ubica una pelota, ¿cuál de las gráficas anteriores se ajusta a las siguientes descripciones:

- La pelota está a una altura fija. ______
- La pelota se lanza desde el suelo, alcanza cierta altura y cae al suelo. ______

c) Argumenten y comparen sus respuestas con las de otros equipos. Valídenlas con ayuda de su maestro y corríjanlas si es necesario.

Resuelvo y aprendo

Gráficas formadas por segmentos de rectas

1. En parejas analicen las gráficas y respondan.

a) La gráfica de la figura 3.43 representa el consumo de combustible de un automóvil compacto popular en América Latina. Para obtener los datos se hizo circular el automóvil con rapidez constante, primero en la ciudad y luego en carretera.

- ¿Qué distancia recorrió el automóvil en carretera durante la prueba? ______
- ¿Cuántos litros de gasolina consumió en ese tramo? ______
- Sin hacer ningún cálculo numérico indiquen en qué tramo del recorrido el rendimiento del auto fue mayor. ______
- El rendimiento del automóvil en kilómetros recorridos por cada litro de gasolina es de:

  ______ $\frac{\text{km}}{\text{L}}$ en la ciudad. ______ $\frac{\text{km}}{\text{L}}$ en carretera.
- ¿Qué característica de la gráfica se relaciona con el rendimiento del automóvil? ______

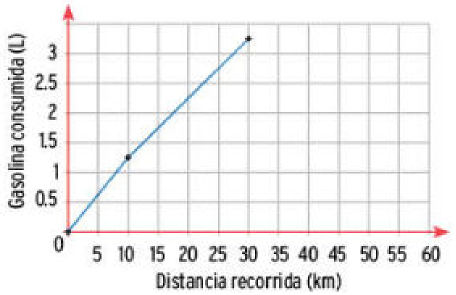


Fig. 3.43

b) La gráfica muestra la población mundial, medida o estimada, para varios siglos.

- ¿Cuál será la población mundial estimada en 2050? ______
- ¿El crecimiento de la población mundial fue mayor entre los años 1950 y 2000 que entre 1500 y 1950? De ser así, ¿cuántas veces fue mayor? ______
- Entre 1950 y 2000 el crecimiento poblacional anual fue de ______ millones de habitantes/año.

Fig. 3.44

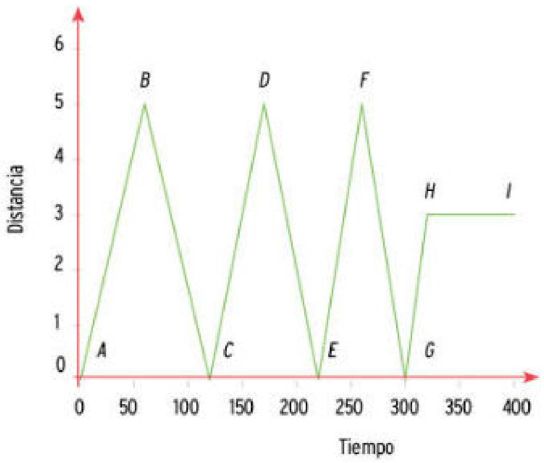
Integración

2. En grupo completen los enunciados y analicen sus propuestas. Valídenlas con apoyo de su profesor

a) En una gráfica formada por secciones rectas, cada segmento de recta indica una variación de tipo ______ entre las variables involucradas. Si las ______ de los segmentos son distintas, entonces a la relación entre las variables les corresponde una ______ de proporcionalidad distinta.

Gráficas con secciones rectas y curvas

3. En parejas resuelvan lo siguiente.



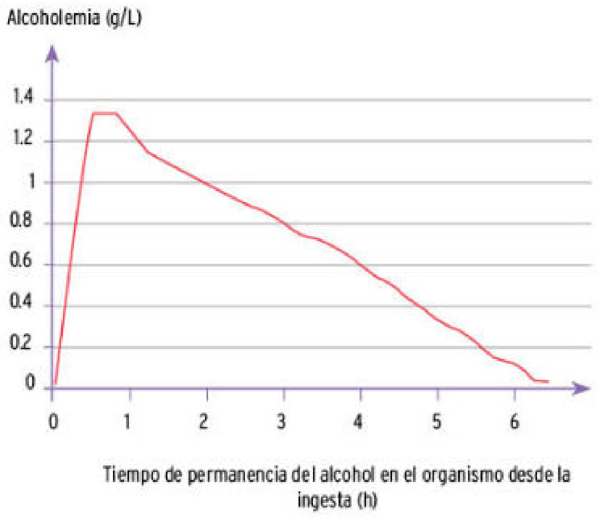
a) Analicen la gráfica y lean las siguientes situaciones. ¿A cuál de éstas corresponde?

- El pistón de una máquina hidráulica sube y baja de manera uniforme (siempre con la misma rapidez) hasta que una falla eléctrica provoca que se detenga.
- A partir del pizarrón, Gregorio camina junto a la ventana hacia el fondo del salón con aire pensativo. Va y viene, cada vez un poco más de prisa hasta que se detiene, iluminado quizá por una revelación.
- En una carrera de obstáculos de un parque de diversiones, Jimena sube y desciende para cruzar una zona de colinas aumentando su rapidez para aventajar a las demás competidoras. Finalmente deja atrás las colinas y llega a una meseta.

Fig. 3.45

b) Propongan otra situación que se describa con la gráfica anterior.

c) La alcoholemia es la cantidad de alcohol en la sangre expresada como una concentración (gramos de alcohol puro por litro de sangre). Al registrar los niveles de alcoholemia a lo largo del tiempo desde la ingesta del alcohol, se obtiene una gráfica conocida como "curva de Widmark" (distinta para cada individuo). Ubiquen en esta gráfica las regiones que corresponden con las siguientes fases del comportamiento del alcohol en el organismo.



- Absorción: es el paso del alcohol desde la vía digestiva hasta la sangre; se absorbe en el estómago y el intestino delgado, y alcanza la mayor concentración en la sangre 30 minutos después de ingerirse.
- Distribución: una vez que se absorbe el alcohol, se distribuye de manera uniforme por todo el organismo a través de la sangre.
- Metabolismo y eliminación: el metabolismo es el conjunto de reacciones químicas que se producen en el organismo mediante las que se degrada el alcohol (principalmente en el hígado); así se degrada entre 90 % y 98 %. El resto, entre 2 % y 10 %, no se metaboliza y se elimina a través de secreciones corporales: sudor, orina, aire que espiran los pulmones.

Fig. 3.46

d) Propongan otra situación que se exprese mediante una gráfica como la anterior (es decir, planteen otras variables). Escríbanla en su cuaderno.

e) Para determinar la duración y regularidad del ciclo menstrual, así como la fecha de ovulación (información útil para implementar métodos conceptivos o anticonceptivos), los médicos recomiendan registrar la temperatura basal, esto es, la temperatura corporal de una mujer que acaba de despertar luego de dormir por lo menos 5 horas. Analicen la siguiente gráfica y respondan.

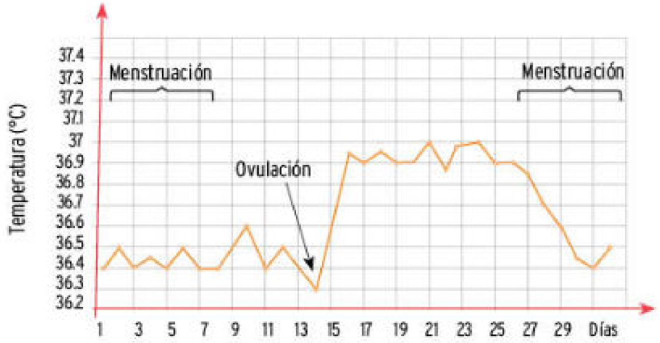


Fig. 3.47

- Describan cómo varía la temperatura en los siguientes periodos.
- Del día 1 al 14: ______
- Del día 14 al 16: ______
- Del día 16 al 26: ______
- Del día 26 al 30: ______
- A partir de la temperatura basal, ¿podrían decir cuál es la fecha de ovulación?

______

- ¿Cómo determinarían la presencia del periodo menstrual con base en la temperatura basal?

______

- ¿Cómo utilizarían gráficas como esta para determinar si el periodo menstrual en una mujer es regular?

______

f) Se tienen dos recipientes iguales con forma de prisma rectangular, pero orientados como muestra la figura 3.48, incisos a) y b).

- Si ambos recipientes se llenan de agua simultáneamente con llaves que arrojan la misma cantidad de agua en tiempos iguales, ¿cuál se llenará primero? ______
- ¿La altura del líquido aumenta de la misma manera en ambos casos? ¿Por qué?

______

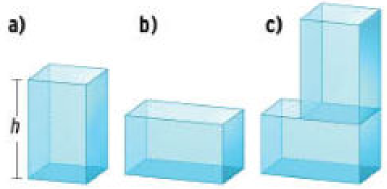


Fig. 3.48

- Dos recipientes, como los de los incisos a) y b), se ensamblan y conectan para formar el del inciso c). Consideren que los tres se llenan con llaves que mantienen flujos constantes e iguales de agua. Relacionen cada inciso con una de las siguientes gráficas, según el aumento de la altura del líquido en los recipientes. Argumenten sus respuestas.

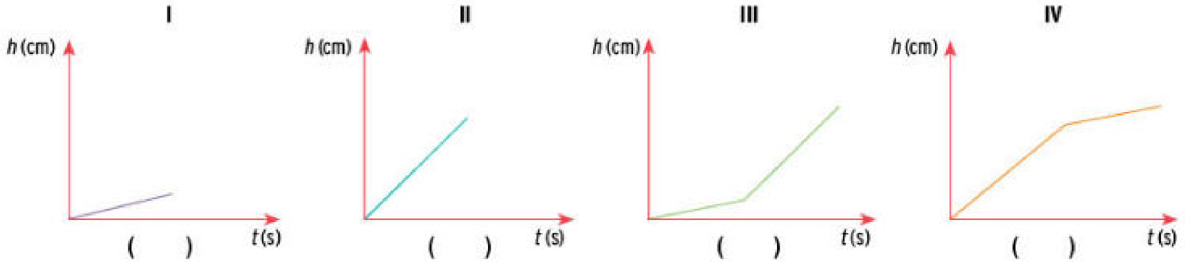


Fig. 3.49

- ¿Cómo sería el recipiente que le correspondería a la gráfica que sobra?

____

- ¿Las gráficas serían distintas si la base de los prismas fuera circular, pero con la misma área y conservaran el mismo volumen? _______________
- Si los recipientes estuvieran llenos y el experimento consistiera en extraer igual cantidad de agua en el mismo tiempo, ¿cómo serían las gráficas de cada uno? Dibújenlas en sus cuadernos.

g) Se tienen dos recipientes cónicos de la misma altura e igual radio, pero orientados como se muestra en los incisos a) y b) de la figura 3.50, y se llenan a la misma razón.

- ¿En cuál de ellos la altura aumentará más rápido en los primeros instantes de llenado? _______________
- ¿Cómo identificas en una gráfica los momentos en que la altura aumenta rápidamente?

____

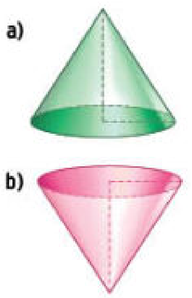
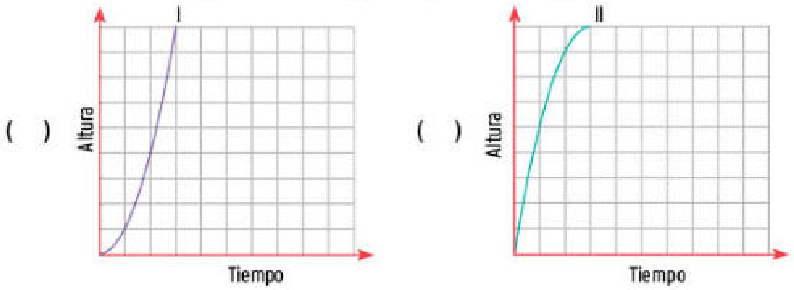


Fig. 3.50

- Relaciona cada recipiente con la gráfica que le corresponde.



- ¿Cómo se relaciona la rapidez con que aumenta la altura y la forma de la gráfica?

____

h) Supón que los siguientes recipientes se llenan con un flujo igual y constante de agua. Esboza la gráfica de la variación de la altura en función del tiempo.

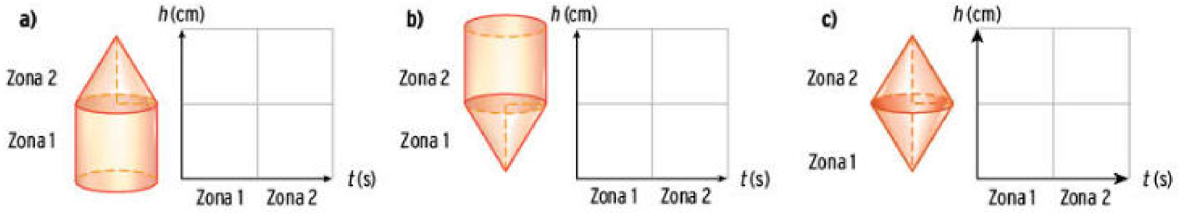


Fig. 3.51

Integración

4. En grupo y con la ayuda de su profesor completen lo siguiente.

a) En el llenado de recipientes, la rapidez con que cambia la altura del líquido depende del área de la sección transversal del recipiente. A _________ área, _________ rapidez de cambio.

Te invito a...

visitar la página electrónica: www.edutics.mx/4SQ para realizar simulaciones y gráficas de llenado de recipientes (Consulta: 21 de enero de 2019).

Consolido mis aprendizajes

1. En parejas hagan lo siguiente.

a) Revisen sus respuestas al problema de la situación inicial y valídenlas en grupo con ayuda de su profesor.

2. La gráfica muestra los resultados de las preferencias electorales de candidatos a un cargo de elección popular.

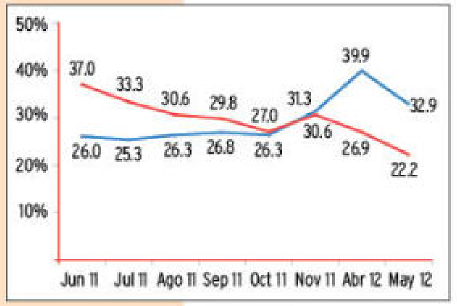


Fig. 3.52

a) Describan el comportamiento de las preferencias de cada candidato.

____

b) ¿En qué momento alcanzaron respectivamente la mayor y menor popularidad? ¿Su popularidad se igualó en algún momento?, ¿en cuál?

____

c) Si la elección fuera a principios de junio de 2012, ¿quién se esperaría que ganara según las encuestas? ¿Esta estimación se hubiera esperado en junio de 2011?

____

3. La gráfica de la derecha ilustra el llenado de un recipiente cuando recibe un flujo de agua constante. Esbocen en su cuaderno el perfil del recipiente.

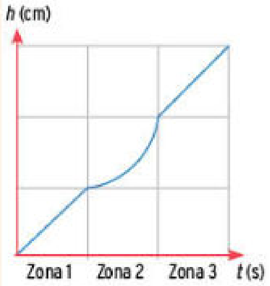


Fig. 3.53

4. Imaginen que desean construir un reloj de agua graduado para la clase de Ciencias. A partir de las gráficas que han analizado, ¿qué forma de recipiente considerarían la mejor?

____

Probabilidad de eventos independientes

Inicio a partir de lo que sé

En parejas lean la siguiente situación.

La prueba final del programa de televisión Dos por tres: ¡responda de una vez!, consiste en elegir entre dos urnas que liberan al azar una bola cuando se giran sus perillas; el participante gana si saca una bola negra. Una de las urnas es simple y contiene dos bolas blancas y una negra; la otra es doble y hay que accionar dos perillas: al girar la de arriba una de las dos bolas de la cabina superior se libera y cae en la cabina inferior; luego se acciona la perilla de abajo para sacar una de las tres bolas de la cabina inferior.

Urna simple Urna doble

Fig. 3.54

a) ¿Qué urna debería elegir el participante para tener las mayores probabilidades de ganar? ¿Por qué? Argumenten su respuesta.

____

____

Resuelvo y aprendo

Probabilidad de eventos dependientes e independientes

1. En equipos analicen y resuelvan las siguientes situaciones.

a) En una bolsa hay tres canicas azules, dos rojas y una verde. Un primer experimento consiste en sacar una canica al azar y registrar su color.

- Completen la siguiente representación del espacio muestral de este experimento.
  $\{A, A, \_\_\_, R, \_\_\_, \_\_\_\}$
- Consideren los siguientes eventos:
  - A_1: Sale una canica azul.
  - V_1: Sale una canica verde.
  - R_1: Sale una canica roja.
- Calculen: $P(A_1) =$ ______________

  $P(V_1) =$ ______________

Fig. 3.55

- Completen el siguiente enunciado.

  Los eventos (A_1 o V_1) y R_1 son complementarios, y por ello podemos calcular $P(R_1)$ así: $P(R_1) = 1 - [\_\_\_\_ + P(V_1)] = \_\_\_\_$. ¿Cómo comprobarían este resultado?

b) Un segundo experimento consiste en extraer otra canica una vez que se ha realizado la primera extracción sin devolver la canica a la bolsa.

- Si se sabe que la primera canica extraída es azul, completen el espacio muestral de este segundo experimento: $\{A, \_\_\_, \_\_\_, R, \_\_\_\}$.
- Ahora consideren los siguientes eventos del segundo experimento.
  A_2: Sale la canica azul. V_2: Sale la canica verde. R_2: Sale la canica roja.
- Calculen las siguientes probabilidades, suponiendo que la primera canica extraída fue azul:

  $P(A_2 | A_1) =$ ______________ $P(V_2 | A_1) =$ ______________

- ¿Cómo serían estas probabilidades si la primera canica extraída hubiese sido verde?

  $P(A_2 | V_1) =$ ______________ $P(V_2 | V_1) =$ ______________

c) Expliquen su procedimiento para encontrar la respuesta, expónganlo ante el grupo y valídenlo con ayuda de su profesor.

Notación
El símbolo $P(B|A)$ indica la probabilidad de que ocurra el evento B una vez que ha ocurrido el evento A. $P(B)$ significa, entonces, la probabilidad de que ocurra B sin considerar que ha ocurrido A o cualquier otro evento.

d) Supongamos ahora que para realizar el segundo experimento, primero se devuelve a la bolsa la primera canica extraída.

- ¿Cómo sería el espacio muestral de este segundo experimento? Represéntenlo en su cuaderno.
- Entonces: $P(A_2 | A_1) =$ ______________ $P(V_2 | A_1) =$ ______________
- ¿Estas probabilidades cambiarían si la primera canica extraída hubiese sido verde? Expliquen. ______________________________

e) Si la canica extraída se devuelve a la bolsa, ¿los eventos A_1 y A_2 son dependientes o independientes? Justifiquen su respuesta.

____

____

- Cuando la canica extraída no se devuelve a la bolsa, ¿los eventos A_1 y A_2 son dependientes o independientes? Justifiquen su respuesta.

____

____

Integración

2. En grupo y con ayuda de su profesor completen las siguientes hipótesis.

a) Si los eventos A y B son ______________ se cumple que $P(B | A) = P(B)$.

b) Si los eventos A y B son ______________ se cumple que $P(B | A) \neq P(B)$.

3. En equipos analicen y resuelvan la siguiente situación.

a) Un experimento consiste en lanzar dos volados consecutivos. Los eventos S_1: Sale sol en el primer volado y S_2: Sale sol en el segundo volado, ¿son dependientes o independientes?

____

- Calcula las probabilidades $P(S_1)$ = ________ y $P(S_2 \mid S_1)$ = ________
- ¿Cómo son entre sí estos resultados? ¿Por qué? ________

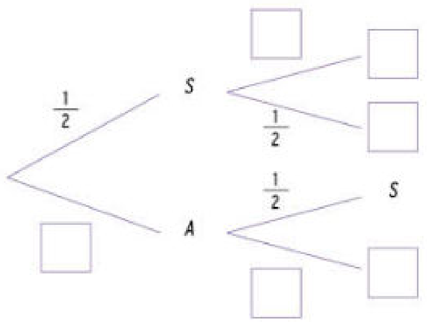


Fig. 3.56

b) Completa el diagrama de árbol del experimento, donde las fracciones indican la probabilidad de los eventos.

- ¿Cuál es la probabilidad de que salgan dos soles al tirar los dos volados?, es decir, ¿cuál es la probabilidad de que, en conjunto, ocurran los eventos S_1 y S_2?

____

- ¿Cómo se relaciona matemáticamente la probabilidad de que salgan dos soles con las probabilidades de que en cada volado salga sol de manera separada?
- $P(S_1 \text{ y } S_2) = P(S_1)$ ___ $P(S_2)$ $= \frac{1}{2}$ ___ $\frac{1}{2} =$ ________

- ¿Cuál es la probabilidad de que en el primer volado salga águila, A_1, y sol en el segundo, S_2? ________
- ¿Se satisface una relación matemática similar a la anterior entre $P(A_1 \text{ y } S_2)$ y $P(A_1)$ y $P(S_2)$? Explica. ________

c) Ahora se lanzan tres volados consecutivos.

- ¿Cuál es la probabilidad de que salgan tres soles, $P(S_1 \text{ y } S_2 \text{ y } S_3)$? ________
- Calculen con base en las probabilidades de los eventos por separado:

  $P(S_1 \text{ y } S_2 \text{ y } S_3) =$ ________
- Completen las relaciones matemáticas siguientes a partir de sus respuestas.
- $P(S_1 \text{ y } S_2 \text{ y } S_3) = P(S_1)$ ________ $P(S_2 \mid S_1)$ ________ $P(S_3 \mid S_1 \text{ y } S_2)$, o bien,

  $P(S_1 \text{ y } S_2 \text{ y } S_3) = P(S_1)$ ________ $P(S_2)$ ________ $P(S_3)$
- ¿Se satisfacen ambas relaciones? ¿Por qué? Argumenten sus respuestas.

____

d) ¿Cuál es la probabilidad de que salga águila en el primer volado, sol en el segundo y águila en el tercero? ________

- ¿Qué relación matemática se satisface entre $P(A_1 \text{ y } A_2 \text{ y } A_3)$, $P(A_1)$, $P(S_1)$ y $P(A_3)$?

  $P(A_1 \text{ y } A_2 \text{ y } A_3) =$ ________

4. Retomen la situación de la actividad 1 de la página 148. Supongan que cada vez que se extrae una canica ya no se devuelve a la bolsa.

a) ¿Cuáles son los valores numéricos de las siguientes probabilidades?

- Que la primera canica extraída sea roja, $P(R_1) =$ ________
- Que la segunda canica extraída sea verde, $P(V_2 \mid R_1) =$ ________
- Que la tercera canica extraída sea azul, $P(A_3 \mid R_1 \text{ y } V_2) =$ ________
- Que en orden las canicas sean roja, verde y azul, $P(R_1 \text{ y } V_2 \text{ y } A_3) =$ ________

b) ¿Cuál de estas relaciones matemáticas:

$P(R_1 \text{ y } V_2 \text{ y } A_3) = P(R_1) \times P(V_2 \mid R_1) \times P(A_3 \mid R_1 \text{ y } V_2)$ o $P(R_1 \text{ y } V_2 \text{ y } A_3) = P(R_1) \times P(V_2) \times P(A_3)$ se satisface en este caso? ¿Por qué? ________

En grupo expongan sus resultados y procedimientos. Valídenlos con ayuda de su profesor y corríjanlos si es necesario.

5. En parejas analicen y resuelvan la siguiente situación.

a) Si se lanzan dos dados ordinarios (cubos con sus caras numeradas del 1 al 6), ¿cuál es la probabilidad de obtener 5 al lanzar el primer dado y 3 al lanzar el segundo? Usen las hipótesis desarrolladas hasta aquí sobre la probabilidad de eventos compuestos; luego verifiquen sus resultados por otros medios (diagramas de árbol, representación del espacio muestral, etcétera.)

____

Integración

6. En grupo y con la ayuda de su profesor completen las siguientes relaciones y, en lo sucesivo, verifiquen si efectivamente se satisfacen.

a) Si los eventos A y B son ________, se cumple que $P(B \text{ y } A) = P(B)$ ___ $P(B \mid A)$.

b) Si los eventos A y B son ________, se cumple que $P(B \text{ y } A) = P(B)$ ___ $P(A)$.

Estas relaciones, se conocen como *regla del producto* para el cálculo de probabilidades.

c) Si el evento se compone de tres o más eventos simples, la regla del producto puede extenderse. Así, por ejemplo, si los eventos son independientes:

$$P(C \text{ y } B \text{ y } A) = P(C) \_\_\_ P(B) \_\_\_ P(A)$$

Consolido mis aprendizajes

1. En parejas resuelvan los siguientes problemas y situaciones. Procuren exponer argumentos con base en la regla del producto.

   a) Regresen a la sección Inicio a partir de lo que sé y completen los siguientes razonamientos que permiten argumentar qué urna es la mejor elección.

   - El espacio muestral para la urna simple es ____________, de aquí podemos concluir que la probabilidad que el participante tiene de ganar al elegir esta urna es de: ________
   - Como ignoramos el color de la bola que caerá de la cabina superior en la urna doble, el espacio muestral en la urna inferior deberá analizarse por casos:
     - Si sale la bola blanca de la urna superior es: ______________________________
     - Si sale la bola negra de la urna superior es: ______________________________
   - Completen el diagrama de árbol con las probabilidades correspondientes.

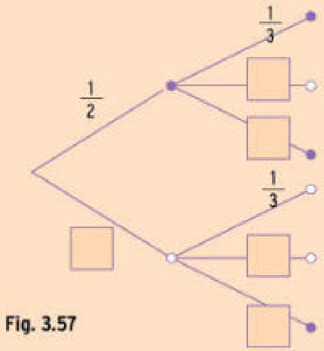


Fig. 3.57

   - ¿Cuál es la probabilidad de obtener bola negra en la segunda urna si en la primera se obtuvo bola negra?

     ____
   - ¿Cuál es la probabilidad de obtener bola negra en la segunda urna si en la primera se obtuvo bola blanca?

     ____

   b) Por el inciso anterior, si denominamos B_1 al evento "cae la bola blanca de la primera urna", N_1 al evento "cae la bola negra de la primera urna" y N_2 al evento de que salga la bola negra de la urna doble, podemos afirmar que:

   $P(N_2 \text{ y } B_1) =$ _____ $\times$ _____ $=$ _____ $\times$ _____ $=$ _____

   o $P(N_2 \text{ y } N_1) =$ _____ $\times P(N_2 \mid N_1) =$ _____ $\times$ _____ $=$ _____

   - Como en el concurso pueden salir cualquiera de las dos situaciones anteriores, entonces sus probabilidades se suman. De aquí que la probabilidad de que salga la bola negra en la urna doble es de: ______________

   c) Por tanto, siendo ______ la probabilidad de sacar la bola de la urna simple y ______ la probabilidad de sacar la bola negra en la urna doble, es mejor que el participante elija la urna __________

Comparen en grupo sus respuestas y los argumentos que emplearon en las actividades anteriores.

Habilidades digitales

Adivina y grafica la función cuadrática

Ahora trabajaremos con un *software* para graficar, con el que aplicarás tus conocimientos sobre funciones cuadráticas. ¡Adelante!

Te invito a...

entrar a la página www.edutics.mx/47J para obtener un programa graficador gratuito. (Consulta: 21 de enero de 2019).

1. Abre el programa (figura 1), da clic sobre el menú *Ventana* y selecciona la opción *Adivinar*: se desplegará una nueva ventana llamada *Adivinar mi ecuación*, que muestra una gráfica que corresponde a una función cuadrática (figura 2).


Fig. 1

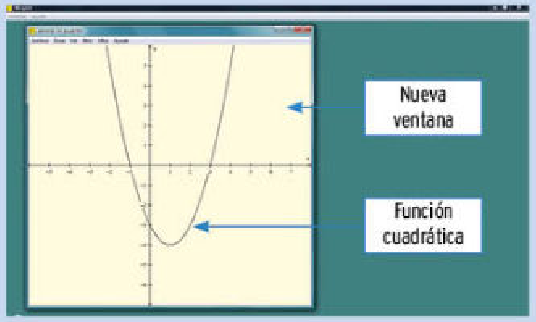


Fig. 2

2. Da clic sobre el menú *Ver*, elige la opción *Cuadrícula* (figura 3), llena los campos *rectangular* y *punteado* y presiona *aplicar* (figura 4). Con base en la información de la gráfica completa la siguiente tabla con los valores de y que corresponden con los valores de x.

x	−7	−6	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6	7
y															

   a) ¿Para qué valores de la variable x la función es igual a cero?

   ____

   b) ¿Qué valores de la variable x alcanzan los valores máximo y mínimo de y?

   ____

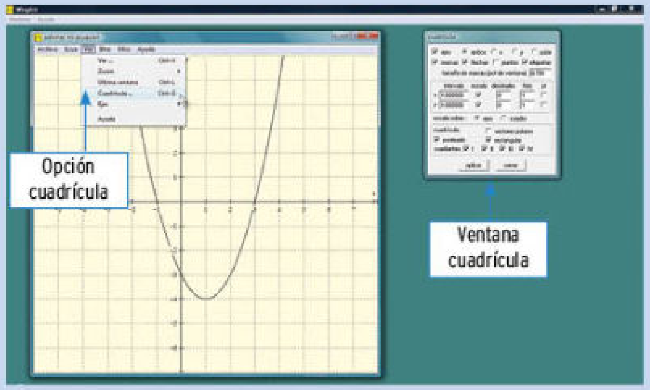


Fig. 3

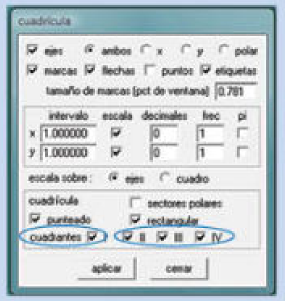


Fig. 4

3. Ahora haz clic en el menú *Ecua* y elige la opción *Adivinar*: aparecerá una ventana donde podrás "adivinar" la ecuación de la gráfica. Obsérvala y en el respectivo campo escribe la ecuación que pienses que le corresponde. Si la ecuación que propones es incorrecta, ésta se graficará junto a la original y podrás intentarlo de nuevo; por el contrario, si la ecuación es correcta, aparecerá la leyenda: *¡Perfecto!* (figura 5).

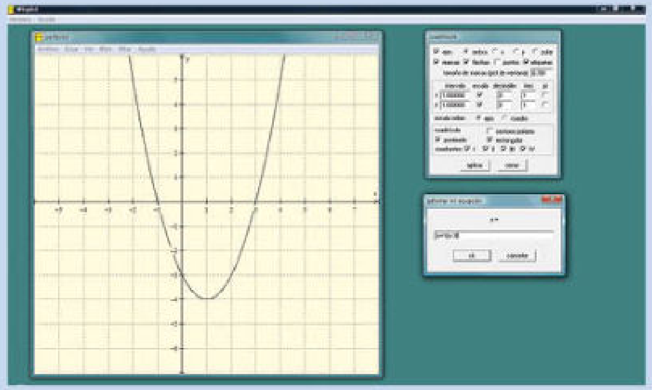


Fig. 5

Ahora da clic sobre el menú *Ecua* y selecciona la opción *Respuesta* para obtener la ecuación correcta en su forma factorizada. Compara tus resultados con los de tus compañeros.

4. Da clic sobre el menú *Ventana* y seleccionen la opción *2-dim*: aparecerá una nueva ventana con un plano cartesiano. Haz clic sobre el menú *Ecua* y selecciona la opción *Explícita*, se desplegará la ventana $y = f(x)$ (figura 6). En el campo $f(x) =$ escribe: $C(x-A)(x-B)$ y presiona *ok*; surgirá la ventana *inventario* (figura 7). Regresa a la ventana del plano cartesiano, da clic sobre el menú *Anim*, selecciona la opción *Individual* y da clic en *A*, en la pantalla aparecerá la ventana *valor actual de A*. Sigue el mismo procedimiento para obtener las ventanas de los valores de *B* y *C* (figura 7).

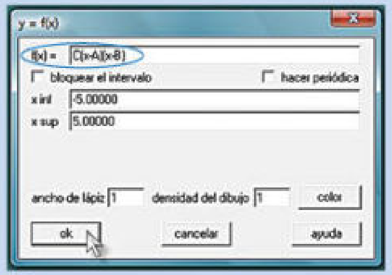


Fig. 6

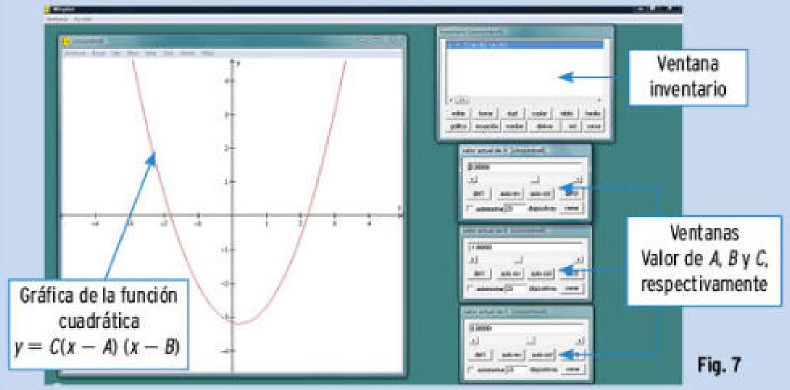


Fig. 7

5. En la ventana *valor actual de C* presiona las pestañas y para cambiar el valor de este parámetro; haz lo mismo para los parámetros *A* y *B*.

a) ¿Qué ocurre con la forma de la gráfica de la función al cambiar los valores del parámetro *C*?

____

b) ¿Qué pasa con los valores en los que la función cambia a cero?

____

c) ¿Qué ocurre cuando se modifican los parámetros *A* y *B*?

____

d) Explica qué significan los parámetros *A* y *B* en la ecuación cuadrática y por qué modifican la gráfica en la forma en la que lo observas.

Compara tus respuestas con las de tus compañeros y en grupo valídenlas con ayuda de su profesor.

Ponte a prueba PISA

1. La figura 1 muestra el cuadrado *ABCD*; el punto *O* se encuentra en el centro y el área en color verde es de 36 cm².

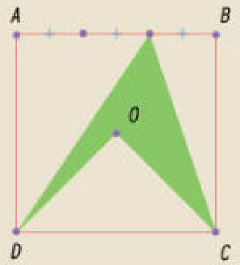


Fig. 1

a) ¿Cuánto miden los lados del cuadrado? ______

2. Los triángulos $\triangle BAD$, $\triangle DEH$ y $\triangle FGH$ se obtuvieron a partir de trazos y dobleces con una hoja rectangular como se observa en la figura 2. $\overline{FG}$ es paralelo a $\overline{BD}$.

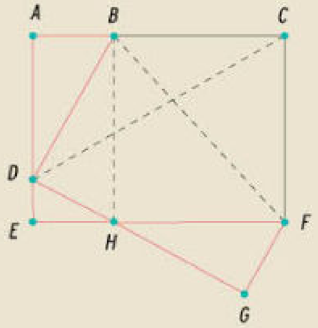


Fig. 2

a) Explica por qué los triángulos *DEH* y *FGH* son semejantes.

______

b) ¿Los ángulos *ABD* y *HFG* son iguales? Explica tu respuesta.

______

c) ¿Los triángulos *DEH* y *BAD* son semejantes? Justifica tu respuesta.

______

3. Ana y Javier juegan con tres dados: uno con 3 caras azules y 3 verdes, otro con 2 caras azules y 4 verdes y el tercero con todas las caras verdes. Javier y Ana lanzan, cada uno, sólo un dado: si las caras que quedan hacia arriba en los dos dados son del mismo color, gana Ana, de lo contrario gana Javier. Él elije el dado con 4 caras verdes y 2 azules.

a) ¿Qué dado le conviene elegir a Ana? ______

4. En 1984, científicos del *Massachusetts Institute of Technology* (MIT) diseñaron un avión impulsado por pedales al que se le llamó *Daedalus 88*, y que se construyó con los materiales ligeros más avanzados, por lo que su masa era de apenas 31 kg, menos de la mitad que su piloto; sin embargo, la envergadura de la nave fue de 34 m, mayor que la de un jet *Boeing 727*. En abril de 1988, el *Daedalus 88* hizo una histórica travesía de 118 kilómetros entre las islas de Creta y Santorini. En una de las pruebas, la velocidad del viento a favor fue de 5 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ y el aparato tardó media hora menos en recorrer los 75 km.

a) De las siguientes expresiones subraya la que represente algebraicamente el tiempo de recorrido del *Daedalus 88*. Recuerda que $t = \frac{d}{v}$, donde *t* es el tiempo de recorrido; *d*, es la distancia, y *v*, la velocidad.

- $\frac{V}{75} - \frac{1}{2} = \frac{V+5}{75}$
- $\frac{V}{75} - \frac{1}{2} = \frac{V-5}{75}$
- $\frac{75}{V} - \frac{1}{2} = \frac{75}{V+5}$
- $\frac{75}{V} - \frac{1}{2} = \frac{75}{V-5}$

5. En la siguiente gráfica se muestra un mareograma basado en datos tomados en el puerto de Morgat, Francia, el 4 de julio de 2013.

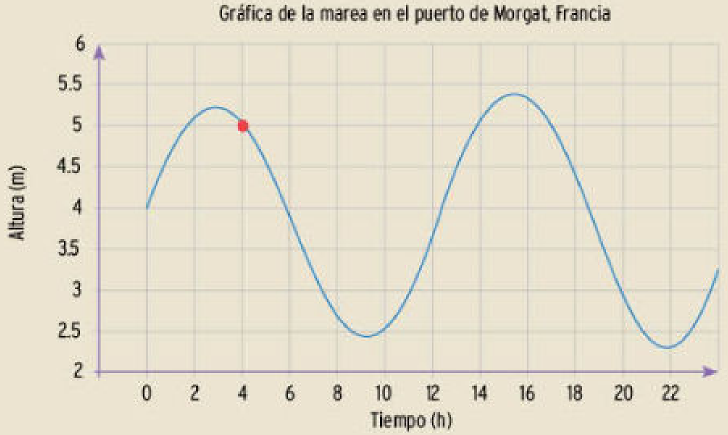


Fig. 3

a) ¿Qué es la marea? ¿Qué información se obtiene de un mareograma?

______

b) ¿Qué información proporciona el punto en la gráfica?

______

c) ¿Qué horas del día son adecuadas para practicar *surf* con la marea alta?

______

Ponte a prueba ENLACE

1. Una hoja rectangular mide $8 + x$ centímetros de base por $15 + x$ centímetros de altura, y el área total de la hoja es de 460 cm^2. Si se pretende resolver el problema con la fórmula general para ecuaciones cuadráticas, ¿cuáles son los valores de *a*, *b* y *c* que permiten aplicar la fórmula de manera correcta?

a) $a = 1, b = 23$ y $c = -340$ **c)** $a = 8, b = 15$ y $c = 460$

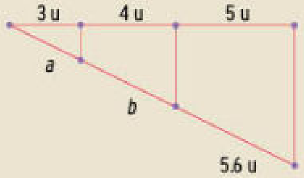
b) $a = -8, b = -15$ y $c = 460$ **d)** $a = 1, b = -23$ y $c = 340$

2. La figura muestra dos construcciones que proyectan su sombra a la misma hora del día. Calcula la altura de la construcción más alta.

a) 7 u **c)** 6 u

b) 5 u **d)** 4.2 u

3. Observa la figura y encuentra las medidas de *a* y *b*.



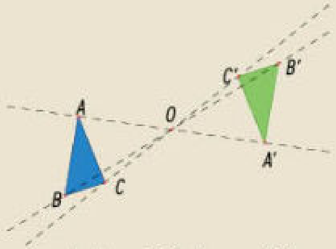
a) $a = 3, b = 4$

b) $a = 3.5, b = 4.6$

c) $a = 3.36, b = 4.48$

d) $a = 4, b = 5$

4. Determina el valor de la razón de homotecia de la siguiente construcción homotética.



a) 1

b) 2

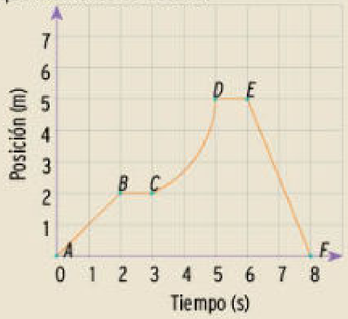
c) -1

d) -2

5. La gráfica muestra la posición de un móvil con respecto del tiempo. ¿En qué momento se detuvo?

a) Del segundo 0 al 2. **c)** Del segundo 3 al 5.

b) Del segundo 2 al 3. **d)** Del segundo 6 al 8.



6. Al lanzar cuatro dados de cubilete de seis caras, ¿qué probabilidad hay de que en todas las caras superiores salga un as?

a) $\frac{1}{6^4}$ **b)** $\frac{1}{4^6}$ **c)** $\frac{1}{24}$ **d)** $\frac{4}{6}$

Ahora sé

Autoevaluación

Marca con una ✓ la opción que demuestre tus alcances correspondientes a los aprendizajes esperados y responde la pregunta.

Contenido	¿Logré el aprendizaje?		¿Cómo puedo mejorar?
	Sí	No	
Resuelvo problemas que implican el uso de ecuaciones cuadráticas. Aplico la fórmula general para resolver dichas ecuaciones.			
Aplico los criterios de congruencia y semejanza de triángulos en la resolución de problemas.			
Resuelvo problemas geométricos mediante el teorema de Tales.			
Aplico la semejanza en la construcción de figuras homotéticas.			
Leo y construyo gráficas de funciones cuadráticas para modelar diversas situaciones o fenómenos.			
Leo y construyo gráficas formadas por secciones rectas y curvas que modelan situaciones de movimiento, llenado de recipientes, etcétera.			
Calculo la probabilidad de ocurrencia de dos eventos independientes (regla del producto).			

Al terminar revisa la tabla con tu profesor. Después, elaboren una estrategia de trabajo para que mejoren su desempeño.

Eje	Contenido	Aprendizajes esperados
Sentido numérico y pensamiento algebraico	**Patrones y ecuaciones** • Obtención de una expresión general cuadrática para definir el enésimo término de una sucesión.	• Utiliza en casos sencillos expresiones generales cuadráticas para definir el enésimo término de una sucesión. • Resuelve problemas que implican el uso de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente. • Calcula y explica el significado del rango y la desviación media.
Forma, espacio y medida	**Figuras y cuerpos** • Análisis de las características de los cuerpos que se generan al girar sobre un eje, un triángulo rectángulo, un semicírculo y un rectángulo. Construcción de desarrollos planos de conos y cilindros rectos.	
	Medida • Análisis de las relaciones entre el valor de la pendiente de una recta, el valor del ángulo que se forma con la abscisa y el cociente del cateto opuesto sobre el cateto adyacente. • Análisis de las relaciones entre los ángulos agudos y los cocientes entre los lados de un triángulo rectángulo. • Explicitación y uso de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente.	
Manejo de la información	**Proporcionalidad y funciones** • Cálculo y análisis de la razón de cambio de un proceso o fenómeno que se modela con una función lineal. Identificación de la relación entre dicha razón y la inclinación o pendiente de la recta que la representa.	
	Análisis y representación de datos • Medición de la dispersión de un conjunto de datos mediante el promedio de las distancias de cada dato a la media (desviación media). Análisis de las diferencias de la "desviación media" con el "rango" como medidas de la dispersión.	

En nuestro entorno hay muchos ejemplos de fenómenos o procesos que cambian de manera constante. Algunos de éstos se pueden describir por medio de una función lineal o cuadrática y están presentes incluso en situaciones u objetos de uso cotidiano. La imagen de la derecha lo muestra, en ella las torres de bloques tienen un incremento constante en el número de bloques que las forman.

Dime la regla y te diré quién sigue

Inicio a partir de lo que sé

La representación de números en forma visual con guijarros o piedras era una práctica regular entre los antiguos griegos; también, durante el Imperio romano, se usaban *calculus*, es decir, pequeñas piedras para contar y hacer operaciones.

Con esta representación, si se parte de la unidad y se añade un número impar de piedras alrededor de cada arreglo para formar el siguiente, se obtienen los números *cuadrados*. En la figura 4.1 se aprecian los primeros cinco números cuadrados. ¿Por qué piensas que reciben ese nombre?

Arreglo 1 Arreglo 2 Arreglo 3 Arreglo 4 Arreglo 5

Fig. 4.1

a) Escriban una expresión algebraica para calcular el número de piedras en la base de cada arreglo con relación al número del arreglo.

b) Escriban también una expresión algebraica para determinar el número de piedras en la altura del mismo arreglo también con relación al número del arreglo.

c) A partir de las expresiones anteriores, escriban otra con la que se obtenga el número de piedras en cada arreglo.

d) ¿Un arreglo con 68 piedras pertenece a la sucesión? Justifiquen su respuesta en su cuaderno.

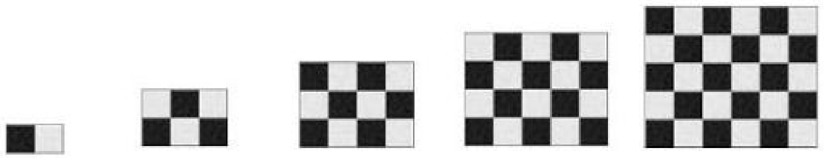
e) ¿Cuántas piedras conformarían el arreglo 20?

Resuelvo y aprendo

Expresiones cuadráticas y sucesiones

1. En equipos resuelvan las siguientes situaciones.

a) Un equipo de trabajadores coloca losetas sobre el piso del salón de usos múltiples en la secundaria José Luis Cuevas en el orden que muestra la figura 4.2. Obsérvenlo.



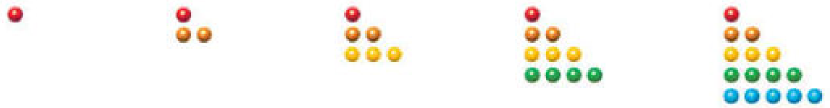
Paso 1 Paso 2 Paso 3 Paso 4 Paso 5

Fig. 4.2

- ¿Qué relación hay entre el número de losetas a lo alto de cada acomodo y el número de paso correspondiente? ________
- ¿Cuál es la relación entre el número de losetas a lo largo de cada acomodo y el respectivo número de paso? ________
- ¿Qué similitudes y diferencias observan entre este arreglo y el de la sección Inicio a partir de lo que sé? ________
- Escriban una expresión algebraica que permita calcular la cantidad de losetas que tendrá cualquier acomodo de la sucesión. Describan, en su cuaderno, su procedimiento para encontrar esa expresión.

Comparen sus respuestas con otros equipos y corríjanlas si es necesario.

b) Analicen la siguiente sucesión de figuras y respondan.



Posición 1 Posición 2 Posición 3 Posición 4 Posición 5

Fig. 4.3

- ¿Qué relación observan entre el número de esferas en la base, la altura y la posición que ocupa cada figura en la secuencia?
- Describan las diferencias y las similitudes entre esta sucesión de figuras y la de la figura 4.2. ________
- Escriban una expresión algebraica para calcular el número de esferas del enésimo término de esta sucesión. ________
- En su cuaderno describan el procedimiento que usaron para encontrar la expresión cuadrática que acaban de escribir.
- ¿Qué posición ocupará un arreglo como los anteriores con 210 esferas? ________
- ¿Un arreglo con 100 esferas forma parte de la sucesión? ¿Por qué?

Verifiquen que la expresión que define el número de esferas en el enésimo arreglo sea correcta. Comparen sus respuestas con las de otros equipos y corrijan los errores que se presenten.

c) Observen los primeros tres elementos de una sucesión de figuras.

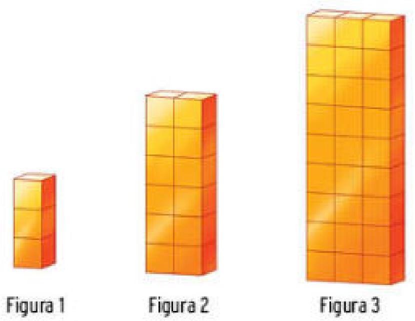


Fig. 4.4

- Completen la tabla a partir de las figuras anteriores.

Número de figura	Número de cubos en la base	Número de cubos en la altura	Número de cubos en la figura
1	1	3	3
2	2		
3			
4			
5			

- ¿Observan alguna regularidad entre el número de la figura y la cantidad de cubos que hay en su base? ¿Cuál? ______
- ¿Cómo varía la altura de cada torre de acuerdo con el número de figura que le corresponde?

______

- Escriban una expresión algebraica que relacione el número de cada figura con el número de cubos de su base. ______
- Escriban una expresión algebraica que relacione el número de cada figura con la cantidad de cubos que forman su altura. ______
- ¿Qué expresión algebraica relaciona el número de cada figura con el total de cubos que la conforman? Escríbanla. ______
- ¿La expresión algebraica corresponde a una ecuación cuadrática? ¿Por qué?

______

______

- ¿Con cuántos cubos se formará la figura 17? Expliquen cómo obtuvieron la respuesta.

______

______

- Escriban los primeros 10 elementos de la sucesión numérica que corresponde a la cantidad de cubos que forman cada figura. ______
- Descompongan cada elemento de la lista anterior en dos factores, de modo que en uno de ellos se identifique un número cuadrado. Completen la tabla con sus resultados.

Sucesión	3	12	27							
Descomposición en factores	3×1	3×4								

- ¿Qué número corresponde a la posición 17? ______
- ¿Cuál es su descomposición en factores? En esa descomposición, ¿cuál es el número cuadrado? ______
- ¿Qué relación observan entre la descomposición de cada número y la expresión algebraica general para el número de cubos de cada figura?

______

Comparen sus respuestas con las de otros equipos. En plenaria, el representante de cada equipo exponga sus procedimientos y valídenlos con apoyo de su profesor.

Sucesiones numéricas y su expresión algebraica

2. Resuelvan en parejas lo siguiente.

a) Analicen la siguiente sucesión numérica: 2, 8, 18, 32, 50, 72, ...

- Descompongan cada elemento en dos factores, de modo que uno sea un número cuadrado. ______
- ¿Qué expresión algebraica relaciona cada elemento con su posición en la sucesión numérica? Expliquen cómo obtuvieron la respuesta.

______

b) Analicen la siguiente sucesión de figuras.

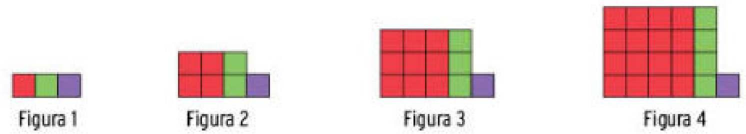


Fig. 4.5

- Escriban los primeros términos de la sucesión numérica que corresponde al número de cuadrados de cada figura.

3, 7, 13, ______, ______, ______, ______, ______, ...

- ¿Cómo se relaciona la cantidad de cuadrados que forman los cuadriláteros de cada color con el número de figura que le corresponde?

____

- Escriban una expresión algebraica que relacione el número de figura con la cantidad de cuadrados que la forman. ______________________

Comparen sus respuestas y procedimientos para encontrar las expresiones algebraicas con otras parejas. Establezcan un criterio para comprobar que sus respuestas sean correctas y verifíquenlas.

Consolido mis aprendizajes

1. En parejas resuelvan la siguiente variante de la situación inicial.

a) Observen los arreglos de piedras.

Fig. 4.6

- Escriban una expresión algebraica que relacione el número de piedras con el número del arreglo correspondiente.

____

2. De manera individual escribe una expresión algebraica para cada una de las siguientes sucesiones.

a)

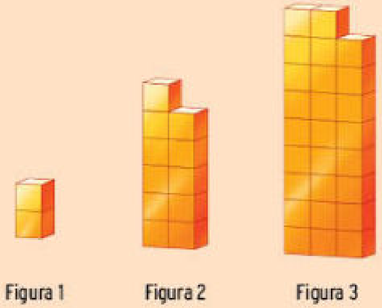


Fig. 4.7

b)

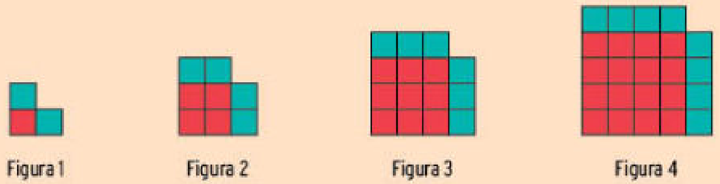


Fig. 4.8

Sólidos de revolución

Inicio a partir de lo que sé

En parejas resuelvan el siguiente problema.

En el taller de orfebrería de la secundaria, Araceli está aprendiendo a moldear figuras de barro en un torno. El torno gira sobre un eje y con las manos se modela la masa de barro para darle la forma que se desea. En la figura 4.10 se aprecia el principio de funcionamiento del torno: al girar la línea roja alrededor del eje, se genera un cilindro hueco.

Fig. 4.9

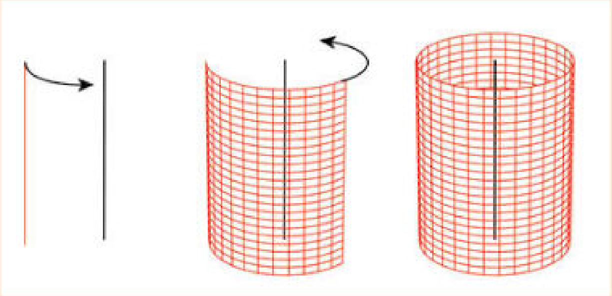


Fig. 4.10

La pieza que hará Araceli será un florero como el de la figura 4.11, y para ello su profesor le pidió que dibujara una línea que, al girarla sobre un eje, generará el florero.

Fig. 4.11

a) ¿Cómo debe ser la línea para obtener el objeto deseado? Trázala en tu cuaderno.

Resuelvo y aprendo

Gíralo y verás

1. En equipos realicen las actividades y respondan.

a) Si a cada una de las figuras siguientes las hicieran girar sobre el eje indicado, ¿qué cuerpo geométrico en tres dimensiones se formaría?

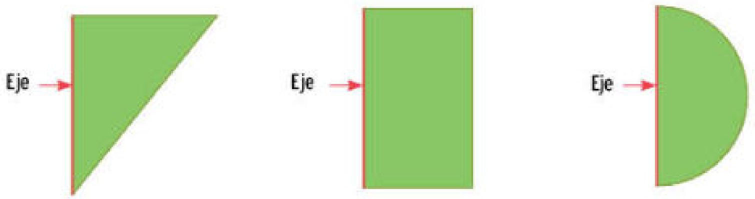


Fig. 4.12

- Dibujen la figura que suponen se formará y justifiquen su respuesta.

Triángulo rectángulo	Rectángulo	Semicírculo

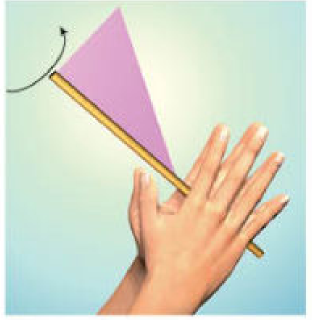


Fig. 4.13

- En cartulina o cartoncillo tracen y recorten figuras geométricas semejantes a las de la figura 4.12.
- Peguen cada una en un palito redondo y delgado por la línea que indica el eje, de manera que sea el eje de rotación de cada figura.
- Hagan girar el palito en torno a su eje, como en la figura 4.13.
- Observen el rastro que dejan las figuras al girar y digan qué objetos sólidos en apariencia se forman.
- Las figuras en tres dimensiones que se formaron se conocen como *sólidos de revolución*; dibujen los que hayan observado.

Triángulo rectángulo	Rectángulo	Semicírculo

- Describan las similitudes y diferencias entre los objetos que consideraron que se formarían y los sólidos de revolución que resultaron al girarlas.

- Analicen las características de cada sólido de revolución y completen la tabla.

	Triángulo rectángulo	Rectángulo	Semicírculo
Nombre del cuerpo geométrico			
¿Qué forma tiene su base?			
¿Cuántas aristas tiene?			
¿Cuántas caras laterales tiene?			
¿Cuántos vértices tiene?			

- ¿Qué semejanzas y diferencias hay entre los sólidos de revolución y los prismas y las pirámides que estudiaron en su curso de Matemáticas 2? Expliquen.

b) En la figura 4.14 se muestran algunos elementos de los sólidos de revolución.

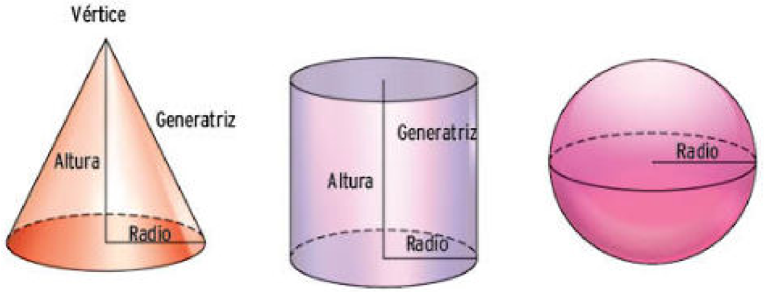


Fig. 4.14

- En las figuras geométricas siguientes señalen las partes de cada una que originan los elementos indicados en los sólidos de revolución anteriores.

Fig. 4.15

Fig. 4.16

c) Para esta actividad necesitarán un trozo de cartulina o cartón, un lápiz y tijeras.

- Tracen una circunferencia en la cartulina y recorten el círculo que se forma.
- Hagan un orificio en el centro del círculo de cartón del mismo diámetro que el lápiz.
- Introduzcan el lápiz en el centro del círculo.
- Deslicen el círculo a lo largo del lápiz.
- ¿Qué cuerpo geométrico se produce al desplazar el círculo a lo largo del lápiz?

___

- ¿Qué partes del círculo generan los elementos del sólido que se genera?

___

Integración

2. En grupo y con ayuda de su profesor respondan.

a) ¿Qué es un sólido de revolución?

___

b) Si en un sólido de revolución se hace un corte en el plano perpendicular al eje de rotación, ¿qué figura se obtiene?

___

Construcción de cilindros y conos

3. En equipos resuelvan las siguientes actividades.

Fig. 4.17

a) Consigan un tubo de cartón de un papel higiénico, que como observan, es la parte lateral de la superficie de un cilindro.

- Con tijeras hagan un corte a lo largo del tubo.
- Desdoblen el tubo y tracen en su cuaderno la figura geométrica plana que se obtiene. ¿Qué forma tiene el desarrollo plano de la superficie lateral del cilindro?

___

- Señalen en su dibujo las partes que corresponden a la altura, las aristas y la cara lateral del cilindro.

Fig. 4.18

b) Consigan un cono de papel de los que se usan para tomar agua.

- Con tijeras corten a lo largo del cono como se observa en la figura 4.18.
- Desdoblen el cono y dibujen el desarrollo plano que obtuvieron. ¿Qué forma tiene el desarrollo plano de la cara lateral del cono?

___

- Señalen en su dibujo las partes que corresponden a la generatriz, las aristas, el vértice y la cara lateral del cono.

Comparen sus resultados con los de otros equipos y discutan: si fueran fabricantes de rollos de cartón, ¿cuál forma plana les convendría utilizar?, ¿por qué?.

4. En parejas analicen las imágenes y respondan.

a) La siguiente imagen corresponde a una parte del desarrollo plano de un sólido de revolución. Reprodúzcanlo en un pedazo de cartulina (pueden hacerlo más grande), recórtenlo y ármenlo para obtener el cuerpo completo. Los triángulos superiores e inferiores, y el trapecio lateral son pestañas para pegar la figura.

Fig. 4.19

- ¿Qué figuras geométricas faltan para completar el cuerpo geométrico?

___

- ¿Cuáles son las dimensiones de esas figuras geométricas? ¿Cómo las obtuvieron?

___

___

___

b) ¿A qué cuerpo geométrico corresponde el siguiente desarrollo plano?

___

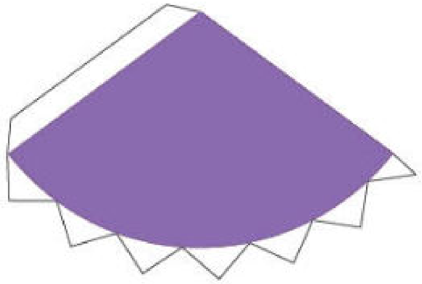


Fig. 4.20

- Cópienlo, recórtenlo y ármenlo. ¿Qué figura geométrica falta para completar el sólido?

___

- ¿Cuáles son las dimensiones de la figura geométrica que falta? Expliquen cómo las obtuvieron.

___

5. En parejas analicen las siguientes situaciones. Resuelvan y respondan lo que se pide.

a) En el curso de Matemáticas de segundo grado aprendieron a calcular la longitud de un arco de circunferencia considerando su relación con el radio y el ángulo que lo genera. En la imagen 4.21, ¿cuántos grados debe tener el ángulo, con vértice en C, para construir el desarrollo plano de un cono cuya base sea el círculo con centro en A? Expliquen su procedimiento en su cuaderno. En el dibujo, cada cuadro mide 1 cm de lado.

b) En la figura 4.22 calculen la longitud del rectángulo que es parte del desarrollo plano de un sólido de revolución. Expliquen el procedimiento que emplearon para obtenerla.

- Con esa medida concluyan el trazo del desarrollo plano.

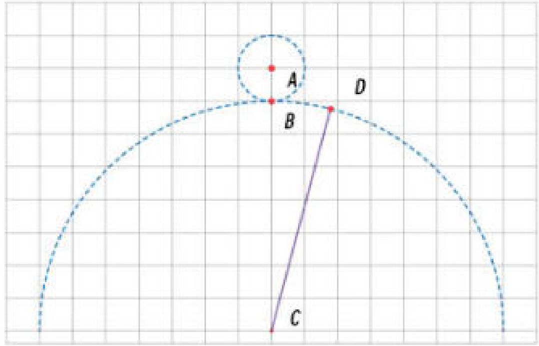


Fig. 4.21

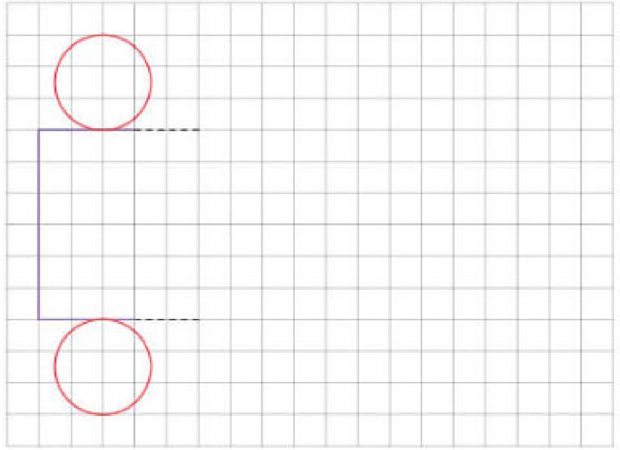


Fig. 4.22

Integración

6. En grupo, con ayuda de su profesor, redacten en su cuaderno un procedimiento para determinar las medidas de los desarrollos planos de un cilindro y un cono, dadas sus alturas y el radio de sus bases.

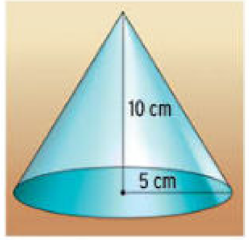


Fig. 4.23

Consolido mis aprendizajes

1. Resuelve en tu cuaderno de manera individual los problemas siguientes.

a) Revisa nuevamente el problema inicial y encuentra la figura plana que al girar alrededor de un eje forma un sólido como el de la figura 4.11.

- ¿Qué figura geométrica tiene una sección transversal de ese sólido?

b) Construye el desarrollo plano de:

- Un cilindro de 5 cm de altura y 2 cm de radio de sus bases.
- Un cono de 5 cm de radio de su base y 10 cm de altura.

La pendiente, la tangente y el ángulo de inclinación de una recta

Inicio a partir de lo que sé

En equipos resuelvan el siguiente problema.

La imagen muestra el esquema de la rampa que se construirá en la central de abasto para facilitar el traslado de mercancías.

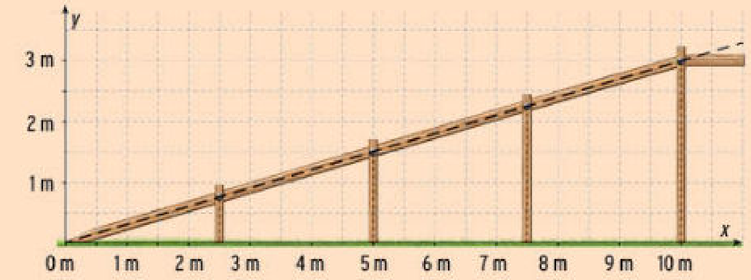


Fig. 4.24

a) Consideren la altura a la que cada poste se une con la rampa y la distancia de cada poste al origen. Escriban los datos en la tabla.

Distancia horizontal (m)	2.5	5	7.5	10
Altura (m)				

- ¿Estas cantidades son proporcionales? ________________
- ¿Qué altura se asciende al subir por la rampa por cada metro que se avanza en sentido horizontal? ________________

b) En su curso de Matemáticas 2 estudiaron los efectos que la pendiente y la ordenada al origen tienen sobre la gráfica correspondiente, así como la forma de las gráficas que corresponden con las expresiones $y = mx$ y $y = mx + b$. Determinen la pendiente y la ecuación de la recta que corresponde a la rampa.

$m =$ ________________

Ecuación: ________________

- ¿Cuánto mide el ángulo que forman la rampa y el suelo? ________________
- ¿Qué tan exacta es la medida del ángulo? ¿Podrían mejorar su precisión? ¿Cómo?

Resuelvo y aprendo

Tangente y pendiente

1. En parejas resuelvan lo siguiente.

a) La imagen muestra un triángulo rectángulo cuya hipotenusa corresponde a un segmento de la recta $y = 0.5x + 2$.

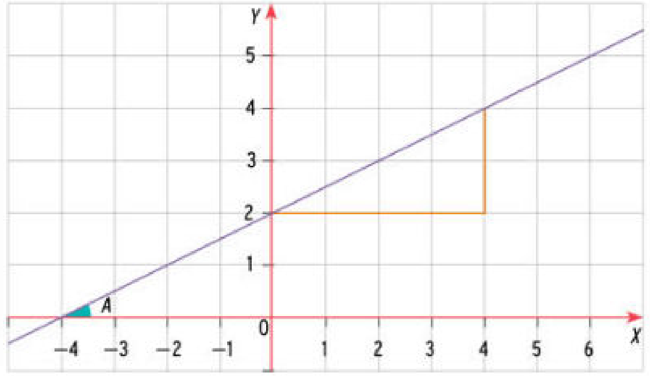
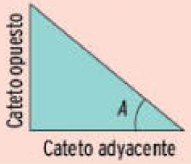


Fig. 4.25

Ángulo de inclinación de una recta: es el que corresponde al ángulo que forman el eje X y la misma recta; se mide desde el lado positivo del eje X en sentido contrario a las manecillas del reloj.

Cateto adyacente y cateto opuesto: en un triángulo rectángulo se llama *cateto adyacente* al que, junto con la hipotenusa, forman el ángulo de referencia. El cateto que se ubica enfrente a ese ángulo se denomina *cateto opuesto* al ángulo.



- Escriban el valor del **ángulo de inclinación** de la recta y señalen su pendiente.

  $A =$ ____________

  $m =$ ____________

- Identifiquen en el triángulo el ángulo A.

- ¿Cuál es el cociente de la razón $\frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Cateto adyacente}}$ respecto a dicho ángulo?

  ____

- Comparen su resultado anterior con el valor de la pendiente de la recta. ¿Qué observan?

  ____

- Dibujen otros tres triángulos rectángulos sobre la misma gráfica cuyas hipotenusas sea también un segmento de la recta, y completen la tabla.

Triángulo	Medida del cateto opuesto	Medida del cateto adyacente	$\frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Cateto adyacente}}$
1			
2			
3			

- En grupo comparen sus resultados, en particular, con quienes dibujaron triángulos diferentes a los suyos. ¿Todos obtuvieron el mismo valor para los cocientes? $\frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Cateto adyacente}}$? ¿Por qué piensan que obtuvieron ese resultado?

  ____

  ____

Para cualquier triángulo rectángulo, cuyos catetos están determinados por uno de sus ángulos agudos (X), la razón $\frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Cateto adyacente}}$ se conoce como *tangente* del ángulo X, y se simboliza como $\tan X$.

2. En parejas resuelvan lo siguiente.

a) Dibujen en la gráfica un triángulo rectángulo cuya hipotenusa sea un segmento de la recta.

b) Identifiquen el ángulo de inclinación y denomínenlo con la letra A.

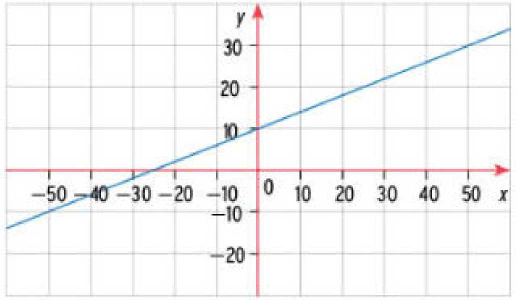


Fig. 4.26

c) Determinen las cantidades en la siguiente tabla.

Cateto opuesto	Cateto adyacente	Tangente de A	Pendiente (m)	Ordenada al origen (b)

d) Escriban la ecuación de la recta. ______________________

e) Tracen otras tres rectas paralelas a la anterior, construyan un triángulo rectángulo en cada una, de modo que la hipotenusa esté sobre la recta, y determinen los mismos valores señalados en el inciso c). Anoten los resultados en su cuaderno.

f) Escriban las ecuaciones de las rectas que trazaron. ¿Qué tienen en común? ¿En qué son diferentes? Anoten las respuestas en su cuaderno.

Integración

3. Comparen sus resultados en grupo y completen la afirmación con ayuda de su profesor.

a) En una recta dada por la ecuación $y = mx + b$, la tangente de su ángulo de inclinación corresponde con ______________________________

Ángulo de inclinación y pendiente

4. En parejas resuelvan lo siguiente.

a) En cada gráfica dibujen un triángulo rectángulo cuya hipotenusa forme parte de la recta. Identifiquen el ángulo de inclinación en cada triángulo.

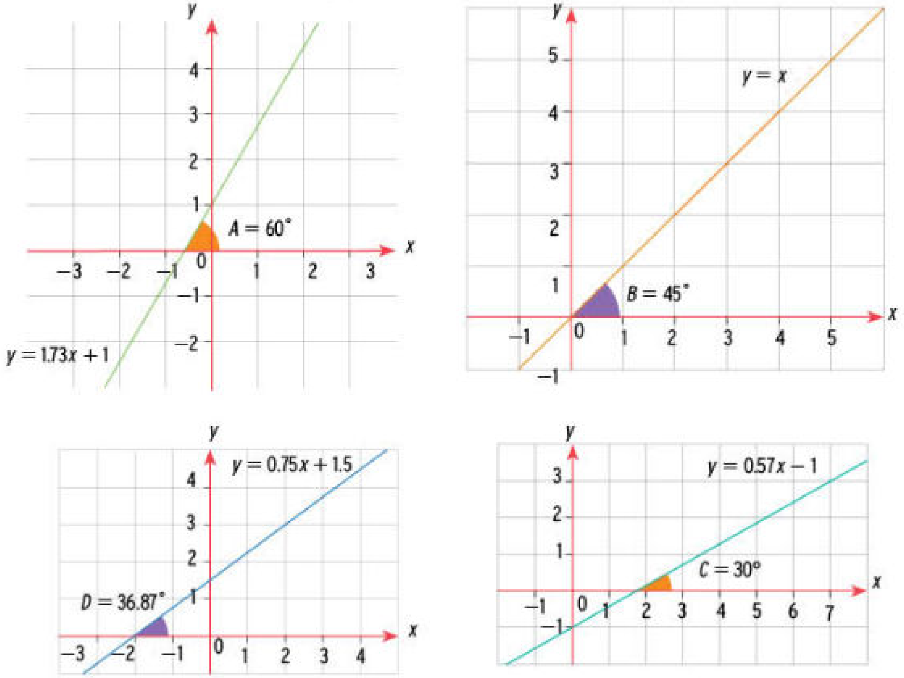


Fig. 4.27

Notación
La función $\tan^{-1}$ se lee tangente inversa, y se activa con teclas como INV, Shift, ↑ o similares, según el modelo de la calculadora.

b) Completen las primeras columnas de la tabla con la información de cada gráfica.

Ángulo	Cateto opuesto	Cateto adyacente	Tangente del ángulo	Pendiente (de la ecuación)	$\tan^{-1}$ (tangente inversa del ángulo)

- Usen la función $\tan^{-1}$ de la calculadora, aplicada a la tangente del ángulo, y anoten en la tabla sus resultados. Verifiquen que la calculadora esté en la función "grados" (*Deg*).
- Comparen sus resultados con los de otras parejas. Expliquen las diferencias y similitudes que identificaron.

- ¿A qué corresponden los valores obtenidos en la última columna? ______

Integración

5. En grupo y con ayuda de su profesor, respondan.

a) ¿Qué relación hay entre el ángulo de inclinación de una recta, su pendiente y el cociente $\frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Cateto adyacente}}$ para cualquier triángulo rectángulo cuya hipotenusa es un segmento de la recta? ______

b) ¿Para qué sirve la función $\tan^{-1}$ de una calculadora? ______

Consolido mis aprendizajes

1. En parejas retomen la actividad inicial y calculen la pendiente y el ángulo de inclinación. Apliquen lo aprendido respecto a la relación entre el ángulo de inclinación, su tangente y la pendiente de la recta.

a) Con sus resultados verifiquen que las respuestas que dieron al principio son correctas.

2. En equipo resuelvan el siguiente problema.

a) La gráfica muestra el aumento de temperatura del agua en un recipiente.

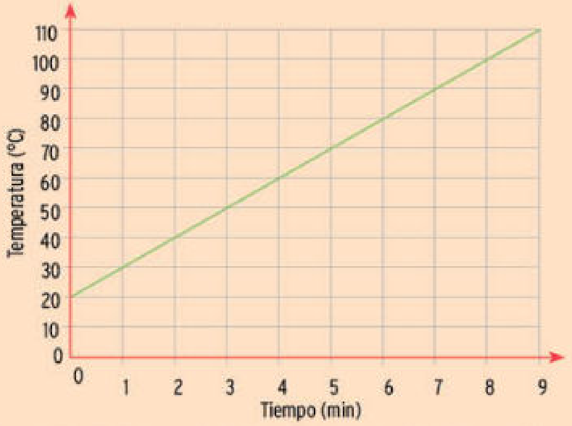


Fig. 4.28

- ¿Cuál es el valor de la tangente del ángulo de inclinación de la recta? ______
- Escriban la ecuación de la recta. ______
- ¿Cuál es el ángulo de inclinación que se obtiene con la calculadora? ______
- Midan el ángulo con un transportador. ______

- ¿El ángulo que obtuvieron con la calculadora coincide con el que midieron? ¿Por qué?

____

____

3. Responde individualmente los siguientes ejercicios.

a) Traza la recta que pasa por los puntos *A* y *B*.

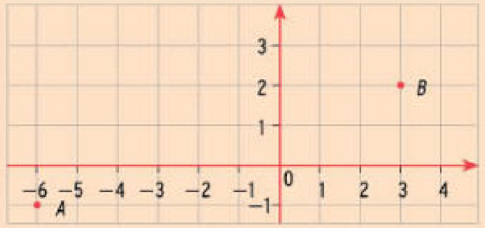


Fig. 4.29

- A partir de esos puntos calcula la pendiente y el ángulo de inclinación de la recta.

  m = ____________ Ángulo de inclinación = ____________

- Escribe la ecuación de la recta. ____
- ¿Cómo cambian los valores de las ordenadas en la recta cuando los de las abscisas cambian en una unidad?

  ____

- ¿Cuál es la relación de este resultado con el valor obtenido para la pendiente de la recta?

  ____

  ____

b) Calcula el ángulo de inclinación de la trayectoria de ascenso del avión, la pendiente y la ecuación de la recta correspondiente.

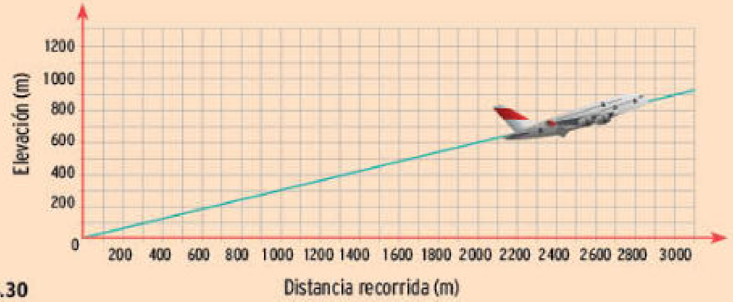


Fig. 4.30

- De acuerdo con tus respuestas, determina qué tanto asciende el avión por cada unidad de distancia que recorre horizontalmente. ____

Seno, coseno y tangente

Inicio a partir de lo que sé

En parejas resuelvan el siguiente problema.

Un teleférico se desplaza desde una altura de 400 m hasta el suelo en un recorrido de 1.7 km.

Fig. 4.31

a) ¿Cuál es el ángulo de elevación del cable que sostiene el teleférico con respecto a la horizontal?

b) Expliquen cómo resolvieron el problema.

Resuelvo y aprendo

Cociente entre los lados de un triángulo rectángulo

1. En parejas resuelvan lo siguiente.

a) La figura 4.32 muestra 4 triángulos sobrepuestos que comparten el mismo ángulo *A*.

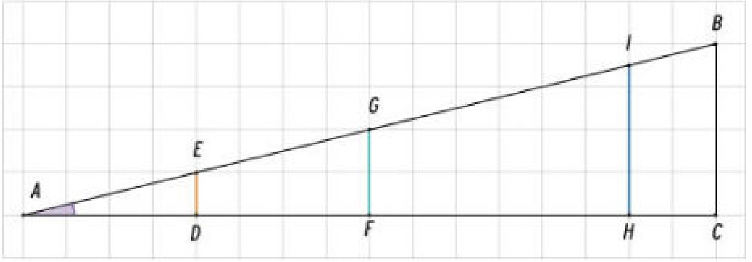


Fig. 4.32

- ¿Estos triángulos son semejantes? ¿Por qué?

____

____

____

- Completen la siguiente tabla. Consideren que cada cuadrado de la figura anterior mide 1 cm por lado. Expresen los resultados hasta con 4 cifras decimales. ¿Cómo pueden obtener el valor de la hipotenusa en cada triángulo a partir de sus catetos?

Triángulo	ADE	AFG	AHI	ACB
Cateto opuesto al ángulo A				
Cateto adyacente al ángulo A				
Hipotenusa				
$\frac{\text{Cateto opuesto al ángulo } A}{\text{Hipotenusa}}$				
$\frac{\text{Cateto adyacente al ángulo } A}{\text{Hipotenusa}}$				

- ¿Cómo calcularon la hipotenusa? ______
- Analicen los resultados de las dos últimas filas, ¿qué observan?

______

- ¿La longitud de los lados de los triángulos cambia el valor de los cocientes? ______
- Si trazaran otras líneas paralelas al segmento $\overline{BC}$ para formar triángulos semejantes a los demás, ¿se conservarían los mismos cocientes? Compruébenlo.

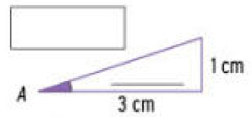
______

El cociente del cateto opuesto entre la hipotenusa se denomina *seno* y el cociente del cateto adyacente entre la hipotenusa se llama *coseno*. Al igual que la tangente, los símbolos de estas razones siempre indican el ángulo de referencia. El símbolo sen A se lee seno del ángulo A o simplemente seno de A, y cos A se lee coseno del ángulo A o coseno de A.

2. En equipos realicen lo siguiente.

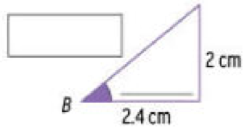
   a) Calculen la hipotenusa, el ángulo señalado, el seno y el coseno de cada uno de los siguientes triángulos rectángulos.

Fig. 4.33



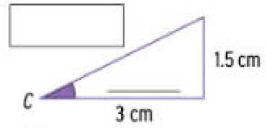
sen A = ______

cos A = ______



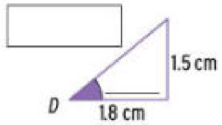
sen B = ______

cos B = ______



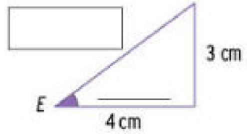
sen C = ______

cos C = ______



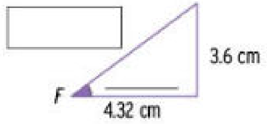
sen D = ______

cos D = ______



sen E = ______

cos E = ______



sen F = ______

cos F = ______

- ¿En qué triángulos los valores de seno y coseno son iguales?

______

- ¿Cuál es la medida del ángulo de referencia para esos triángulos?

______

- ¿Cómo son esos triángulos entre sí? ______
- ¿En qué triángulos los valores de seno y coseno correspondientes son diferentes?

______

- ¿Cuánto mide el ángulo de referencia en dichos triángulos? ______
- ¿Cómo son esos triángulos entre sí? ______

Integración

3. En grupo completen los enunciados con ayuda del profesor.

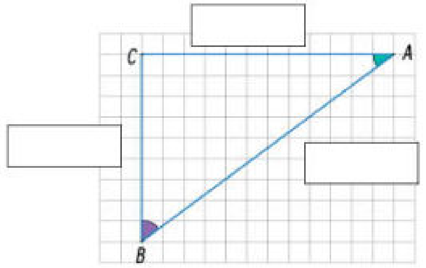
   a) La razón $\frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Hipotenusa}}$ en un triángulo rectángulo es igual a la misma razón en otro triángulo rectángulo si éstos son ______.

   b) A ángulos ______ les corresponden valores de seno y ______ diferentes.

   c) Las razones de seno y coseno sólo dependen de la medida del ______, no de la medida de los ______ de un triángulo.

4. En parejas realicen lo siguiente.

   a) Escriban las medidas de los lados de los siguientes triángulos rectángulos. Cada cuadro mide 0.5 cm de lado.



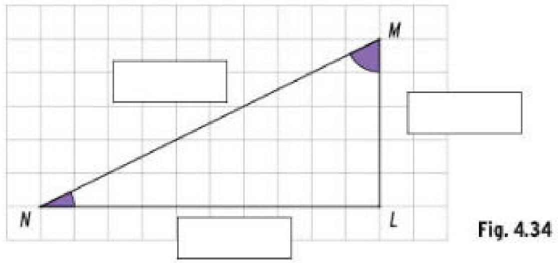


Fig. 4.34

   b) Calculen el valor de las siguientes razones para cada triángulo.

sen A = ______	sen B = ______	sen N = ______	sen M = ______
cos A = ______	cos B = ______	cos N = ______	cos M = ______
tan A = ______	tan B = ______	tan N = ______	tan M = ______

- ¿Cómo son entre sí las parejas de ángulos A con B y M con N? ______

Te invito a...

realizar la actividad de la sección Habilidades digitales, en la que, por medio de un programa de dibujo, podrás relacionar la pendiente de una recta con la razón tangente; además podrás analizar cómo cambian los valores de seno, coseno y tangente al modificar el ángulo de inclinación de una recta.

- ¿Qué relación observan entre los valores de seno y de coseno para esas parejas de ángulos? ______

c) ¿Cuál es el resultado de las siguientes operaciones?

$\tan A \times \tan B =$ ______ $\tan N \times \tan M =$ ______

- ¿Se puede decir que los dos resultados son iguales? Justifiquen su respuesta.

______

d) Tracen en sus cuadernos un triángulo rectángulo cualquiera y verifiquen si se cumplen las relaciones anteriores.

e) Comparen sus resultados con el resto del grupo y, con ayuda de su maestro escriban una conclusión sobre las relaciones entre seno, coseno y tangente de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo.

5. En parejas resuelvan lo siguiente.

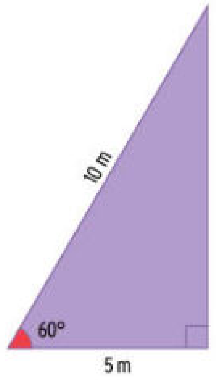


Fig. 4.35

a) Calculen el valor de cos 60° a partir del triángulo que se muestra en la figura 4.35.

______

b) Sin hacer cálculos determinen el valor de sen 30° y expliquen su respuesta.

______

c) Calculen las siguientes cantidades.

- Cateto opuesto al ángulo de 60°. ______
- tan 60° = ______
- tan 30° = ______
- tan 60° × tan 30° = ______

Integración

6. En grupo completen lo siguiente con ayuda de su profesor.

a) Si A y B son dos ángulos complementarios, entonces

- $\operatorname{sen} A = \cos$ ______ y $\cos A =$ ______ B; $\tan A \times \tan B =$ ______

b) Completen las igualdades de acuerdo con el siguiente triángulo.

- $\operatorname{sen} A = \cos B = \frac{a}{\_\_\_}$ y $\operatorname{sen} B = \cos A = \frac{c}{\_\_\_}$
- $\tan A \times \tan B = \frac{a}{\_\_\_} \times \frac{\_\_\_}{\_\_\_} =$ ______

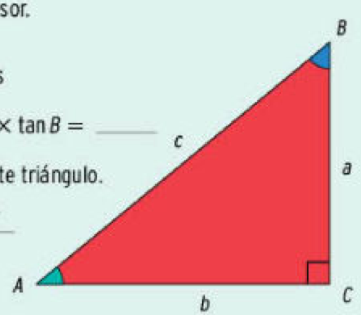


Fig. 4.36

La medida de los ángulos

Notación

En una calculadora las funciones sen^{-1} y cos^{-1} se leen seno inverso y coseno inverso; se activan con las teclas INV, Shift, ↑ u otras similares, según el modelo de la calculadora.

7. En parejas resuelvan lo que se indica.

a) Una grúa sostiene un bloque de acero como muestran las imágenes.

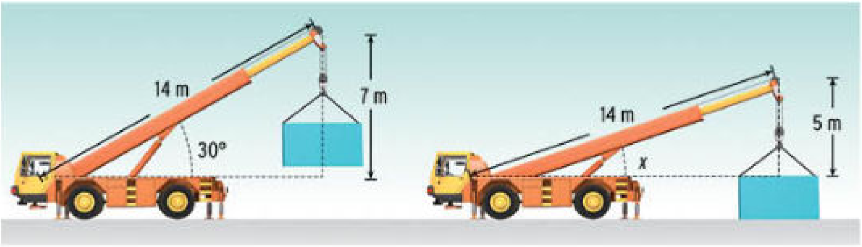


Fig. 4.37

- Escriban el valor de sen 30° considerando los datos de la primera imagen.

______

- ¿Qué valor se obtiene en la calculadora si se aplica sen^{-1} al resultado anterior?

______

- ¿Qué representa este valor? ______
- ¿A qué ángulo debe estar el brazo de la grúa para colocar el bloque sobre el piso? Expliquen su procedimiento para encontrar la respuesta.

______

8. En parejas calculen la hipotenusa del triángulo rectángulo de la figura 4.38 y las razones que se solicitan. Utilicen calculadora y anoten hasta 4 cifras decimales.

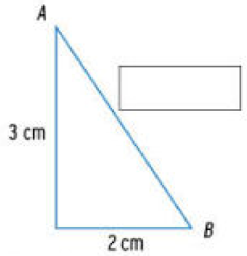


Fig. 4.38

$\operatorname{sen} A =$ ______ $\cos A =$ ______ $\tan A =$ ______

$\operatorname{sen} B =$ ______ $\cos B =$ ______ $\tan B =$ ______

a) Completen las siguientes operaciones; usen su calculadora. Observen el ejemplo.

$\operatorname{sen}^{-1} 0.5547 = 33.690°$ $\cos^{-1} 0.8321 =$ ______ $\tan^{-1}$ ______ = ______

sen^{-1} ______ = ______ $\cos^{-1} 0.5547 =$ ______ $\tan^{-1} 1.5 =$ ______

- Escriban el valor de los ángulos.

$A =$ ______ $B =$ ______

Integración

9. En grupo completen lo que se indica con ayuda de su profesor.

a) Si se conoce alguno de los cocientes de las razones seno, coseno o tangente, con las razones inversas sen^{-1}, cos^{-1} o tan^{-1} de la calculadora se obtiene el valor del ______.

Consolido mis aprendizajes

1. En parejas retomen la actividad inicial y determinen el ángulo de elevación del cable. Apliquen lo que aprendieron acerca de las razones seno y coseno. Comparen su resultado con el que obtuvieron al principio. Corrijan los resultados si tuvieron algún error.

2. Dibujen en su cuaderno tres triángulos rectángulos, donde el coseno de uno de sus ángulos agudos sea 0.5, y completen la tabla con las medidas de los triángulos.

Triángulo	Cateto opuesto (cm)	Cateto adyacente (cm)	Hipotenusa (cm)
1			
2			
3			

a) ¿Cómo son entre sí los tres 3 triángulos? Justifiquen su respuesta.

____

3. Escriban las medidas de los lados del triángulo rectángulo de la figura 4. 39 si se sabe que sen $A = \frac{3}{5}$.

a) ¿Cuánto mide el ángulo A? _______________

b) ¿Y el ángulo B? _______________

c) Calculen tan A. _______________

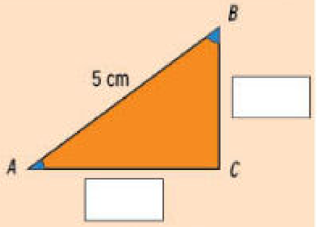


Fig. 4.39

4. De acuerdo con la imagen 4.40, ¿a qué ángulo se observa el Sol en el horizonte?

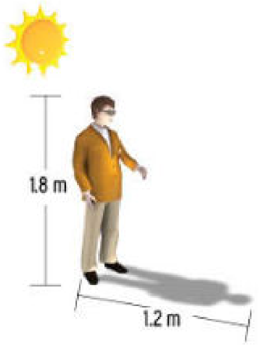


Fig. 4.40

5. El segmento de la figura 4.41 representa uno de los catetos de un triángulo rectángulo.

a) ¿Con qué ángulo se debe trazar un segmento de 5 cm que corresponde a la hipotenusa?

____

b) Traza la hipotenusa y el cateto que faltan para comprobar tus cálculos.

Fig. 4.41

4 cm

6. Diseña un problema geométrico en el que apliques las razones seno, coseno, tangente y los ángulos en triángulos rectángulos. El problema debe estar relacionado con tu entorno en una situación real. Pide a tu maestro que lo revise e invita a un compañero a que lo resuelva; resuelve el que él te proporcione y, al final, revísenlos mutuamente.

¿Para qué sirve la trigonometría?

Inicio a partir de lo que sé

En equipos resuelvan la siguiente situación.

La distancia entre dos edificios es de 60 m. La altura del menos alto es de 40 m y desde su azotea se observa el techo del otro edificio con un ángulo de elevación de 40°, como se observa en la figura 4.42.

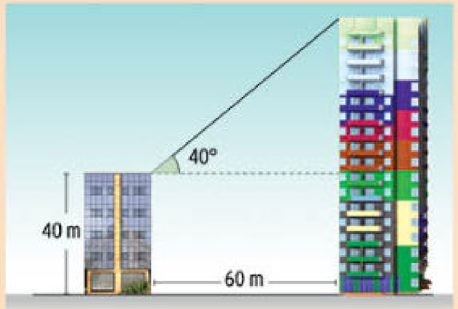


Fig. 4.42

a) ¿Cuál es la altura del edificio más alto?

Resuelvo y aprendo

Variación de seno y coseno

1. En parejas resuelvan la siguiente actividad.

a) En el primer cuadrante del plano cartesiano de la imagen se muestra el sector de una circunferencia con centro en el origen y radio 1. Se trazó un radio con un ángulo de 30° que toca a la circunferencia en el punto A. Observen que se forma un triángulo rectángulo y determinen lo siguiente.

- Medida de los catetos del triángulo:
  - Cateto adyacente: _______________
  - Cateto opuesto: _______________
- Coordenadas del punto A: _______________
- Los valores de seno y coseno de 30°:
  - cos 30° = _______________
  - sen 30° = _______________
- ¿Qué relación observan entre los resultados de este inciso?

____

____

____

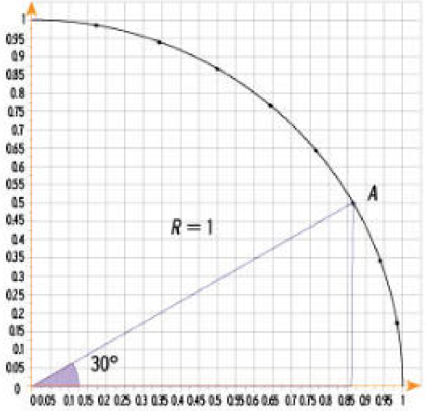


Fig. 4.43

Sector circular: parte del círculo limitada por dos radios y el arco comprendido entre ellos.

b) Dibujen en el sector circular los radios correspondientes a los ángulos de 0°, 10°, 17.5°, 30°, 45°, 60°, 72.5°, 80° y 90°. Marquen los puntos donde los ángulos cortan al arco y tracen los triángulos rectángulos que se forman. Después completen la tabla.

Ángulo	Cateto adyacente	Cateto opuesto	Coordenada *x* del punto de intersección	Coordenada *y* del punto de intersección	Coseno	Seno
0°						
10°						
17.5°						
30°						
45°						
60°						
72.5°						
80°						
90°						

- ¿Qué relación hay entre la medida de los catetos y las razones seno y coseno?
- ¿Qué relación observan entre las coordenadas del punto de intersección de cada ángulo con el arco y las razones seno y coseno?
- ¿Cómo varía el cateto opuesto cuando el ángulo aumenta? ______
- ¿Cómo varía el cateto adyacente? ______
- ¿Cuál es el valor máximo que pueden tener los valores seno y coseno? Expliquen su respuesta. ______
- Indiquen las coordenadas del punto donde el coseno alcanza su máximo valor.
- Indiquen las coordenadas del punto donde el seno alcanza su máximo valor. ______
- ¿Para qué ángulo el seno y el coseno tienen el mismo valor? ______
- Escriban el valor de las siguientes razones.

cos 0° = ______ cos 90° = ______ cos 45° = ______

sen 0° = ______ sen 90° = ______ sen 45° = ______

Integración

2. En grupo y con ayuda de su profesor completen lo siguiente.

a) En un círculo de radio 1 o *círculo unitario*, el valor del coseno corresponde al valor de la coordenada ____ y el seno a la coordenada ____ del punto donde el radio toca la circunferencia.

b) Entre 0° y 90°, el seno ______ a medida que el ángulo crece, hasta alcanzar su máximo valor, que es de ____. Por otro lado, el coseno ______ conforme el ángulo crece; su máximo valor, 1, ocurre cuando el ángulo mide ____°.

Representación gráfica y variación de la tangente de un ángulo

3. En parejas realicen la siguiente actividad.

a) Tracen los segmentos que van del origen a cada punto *A*, *B*, *C*, *D*, *E* y *F* en la recta tangente a la circunferencia que define el sector circular en la figura 4.44.

- Determinen el ángulo y la coordenada del eje de las ordenadas (*y*) de cada punto sobre la tangente. Anótenlos en la tabla.
- Calculen la razón tangente de cada ángulo a partir de los valores de seno y coseno. Para ello consideren los puntos donde las rectas cortan al sector circular. Escriban los resultados en la tabla.

Recta tangente a una circunferencia: es una recta que toca a una circunferencia en un solo punto sin cruzarla. La recta es perpendicular al radio del círculo.

Ángulo *R* (°)	Coordenada *y*	$\tan R = \frac{\text{sen } R}{\cos R}$

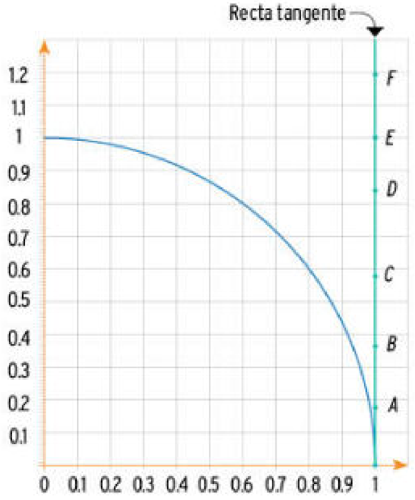


Fig. 4.44

- ¿Cómo son los valores de la coordenada *y* de cada punto sobre la recta tangente con relación a los de la tangente para cada ángulo? ______
- Si el ángulo aumenta, ¿el valor de la tangente aumenta o disminuye? ______
- ¿Para qué ángulo la tangente es 0? ______

Te invito a...

visitar la página www.edutics.mx/4hX para ampliar tu conocimiento del círculo trigonométrico mediante una aplicación interactiva. (Consulta: 21 de enero de 2019).

- ¿Para qué ángulo la tangente adquiere valor de 1? ____________
- ¿Se puede trazar una recta con un ángulo de 90° respecto al eje *X* que parta del origen y toque la recta tangente? Expliquen su respuesta.

  ____
- De acuerdo con su respuesta anterior, ¿cuál es el valor de tan 90°? ____________
- Determinen el valor de la tangente de 90° con una calculadora y verifiquen su respuesta. ____________

En grupo y con ayuda de su profesor discutan el valor de la tangente cuando el ángulo es de 90°. Anoten las conclusiones en su cuaderno.

Integración

4. En grupo y con ayuda de su profesor acuerden las respuestas correctas a las siguientes preguntas.

a) ¿Cómo se representa gráficamente la tangente de un ángulo en el círculo unitario?

____

____

b) ¿Cómo varía la tangente de un ángulo agudo cuando éste cambia de 0° a 90°?

____

____

Aplicación de las razones trigonométricas

5. En parejas resuelvan los siguientes ejercicios aplicando las razones seno, coseno o tangente.

a) Determinen la altura a la que llega la escalera eléctrica de la figura 4.45.

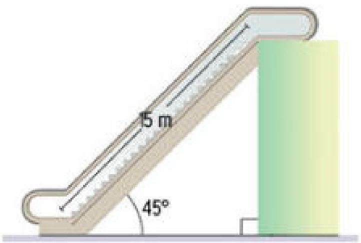


Fig. 4.45

b) ¿Cuánto mide el largo de cada cable que sostiene a la antena?

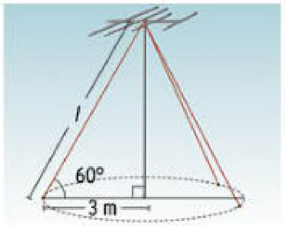


Fig. 4.46

c) A partir de las medidas que se muestran en la figura 4.47, calculen el ancho del río.

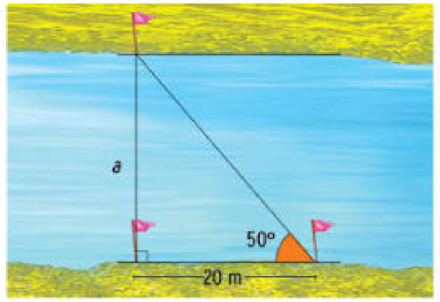


Fig. 4.47

Integración

6. En grupo completen los siguientes enunciados con ayuda de su profesor.

a) Si en problemas con triángulos rectángulos se conocen las medidas de la hipotenusa y de un ángulo agudo, se usa la razón seno para calcular el cateto ____________ y la razón ____________ para calcular el cateto ____________.

b) Si se conocen las medidas de alguno de los catetos y de un ángulo agudo, el valor de ____________ se puede conocer mediante las razones ____________ o coseno.

c) Si se conoce la medida de uno de los catetos y de un ángulo agudo, se usa la razón ____________ para conocer la medida del otro cateto.

Te invito a...

visitar la dirección electrónica: www.edutics.mx/48a en la que encontrarás una aplicación interactiva que calcula las razones seno, coseno y tangente para un ángulo agudo. (Consulta: 21 de enero de 2019).

Consolido mis aprendizajes

1. En parejas retomen la actividad inicial y determinen la altura del edificio más alto. Apliquen lo aprendido respecto a las razones seno, coseno y tangente. Comparen su resultado con el que obtuvieron antes, contrasten sus respuestas con las de sus compañeros y valídenlas con apoyo de su profesor.

2. De manera individual resuelve los siguientes problemas.

a) La inclinación de la pendiente en un tramo de la carretera es de 10°. Si la longitud de ese tramo es de 200 m, ¿qué altura se alcanza al final con respecto a la del inicio?

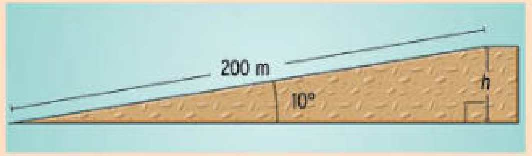


Fig. 4.48

Fig. 4.49

b) Si de la embarcación que jala un paracaídas se han soltado 60 m de cuerda y ésta se mantiene tensa formando un ángulo de 40° respecto al nivel del agua, ¿a qué altura está el paracaídas? Considera que la cuerda se sujeta sobre la embarcación a 1 m de altura sobre el agua.

c) La figura 4.50 muestra la estructura de un puente colgante. Uno de los cables se extiende desde un extremo (punto *B*) hasta el punto más alto de una de las torres (punto *A*), que junto con el segmento de plataforma que va de *B* a *C* y la altura de la torre medida desde la plataforma (de *C* a *A*), forma un triángulo rectángulo. Calcula los datos que se piden (hasta tres cifras decimales).

Fig. 4.50

- Calcula la longitud del cable que se extiende desde el punto *A* hasta el *B*.
- Calcula el ángulo *B* que forman el cable y la plataforma del puente.
- Determina el ángulo *A* que forman el cable y la torre.

d) Desde la parte más alta de un faro, con una altura de 20 m sobre el nivel del mar, se observa un barco con un **ángulo de depresión** de 55°. Calcula la distancia del barco al faro.
En el dibujo haz los trazos adecuados y anota los datos que proporciona el planteamiento del problema.

Fig. 4.51

e) Plantea una situación que requiera el uso de la razón tangente para resolverla y escríbela en tu cuaderno. La situación debe ser real y de tu entorno, de modo que al final se pueda comprobar físicamente la respuesta. Pide a un compañero que resuelva la situación que planteaste y resuelve la que él propuso.

Ángulo de depresión: es el que se forma entre la línea horizontal y la línea visual de un observador a un objeto que se encuentra en posición inferior.

¿Cuánto cambió?

Inicio a partir de lo que sé

En parejas realicen la siguiente actividad.

En el campeonato mundial de automovilismo, durante las pruebas eliminatorias, cada piloto debe recorrer 12 vueltas a la pista procurando el menor tiempo posible en alguna de ellas. Esto con la finalidad de asignar los lugares de salida en la carrera final. El piloto que logre el mejor tiempo en una de las vueltas se ubicará en la primera línea de salida al inicio de la carrera. La gráfica de la figura 4.52 muestra los tres mejores recorridos del piloto Fernández en las pruebas de clasificación. En esta competencia, en particular, el circuito tiene 6 000 m de longitud.

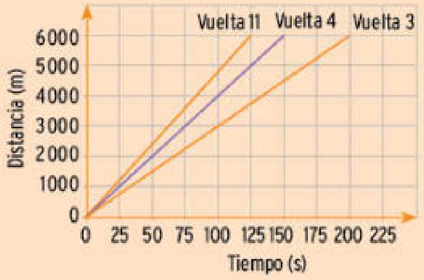


Fig. 4.52

a) De acuerdo con la forma de las gráficas, señalen cómo fue el movimiento del automóvil de Fernández. ______

b) ¿Cuál es la pendiente de cada recta? ______

c) Calculen la rapidez del automóvil en cada vuelta. ______

d) ¿Cómo son entre sí los resultados anteriores? ______

e) ¿En cuál vuelta hizo Fernández su mejor tiempo? ______

Resuelvo y aprendo

La razón de cambio

1. En parejas resuelvan la siguiente actividad.

a) La gráfica de la figura 4.53 muestra la relación entre el tiempo que dura una llamada telefónica de larga distancia y su costo en dos compañías distintas.

- ¿Cómo cambia el costo de la llamada al incrementarse el tiempo?

______

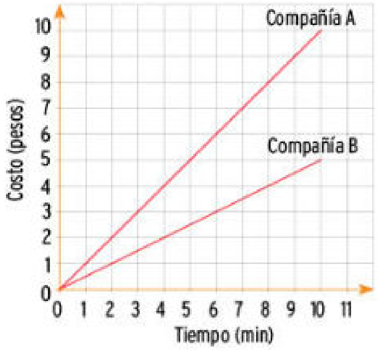


Fig. 4.53

- ¿Cuál es la diferencia entre el costo por una llamada de 4 minutos y una de 8 minutos en la compañía A? ____________________
- ¿Cuál es la diferencia entre el costo por una llamada de 4 minutos y una de 8 minutos en la compañía B? ____________________
- ¿En cuál de las dos compañías el incremento del costo por llamada es mayor?

____

- ¿Cuál de las dos gráficas es más inclinada? ____________________

b) Completen las tablas a partir de la información de la gráfica de la figura 4.53.
- Diferencia en el costo de llamada en las compañías A y B entre los minutos 6 y 10.

	Diferencia en costo (pesos)	Diferencia en tiempo (min)	Cociente de la diferencia del costo entre la diferencia del tiempo de llamada
Compañía A	$10 - 6 = 4$	$10 - 6 = 4$	$\frac{4}{4} = 1$
Compañía B			

- Diferencia en el costo de llamada de las compañías A y B entre los minutos 2 y 8.

	Diferencia en costo (pesos)	Diferencia en tiempo (min)	Cociente de la diferencia del costo entre la diferencia del tiempo de llamada
Compañía A			
Compañía B			

- La diferencia en el costo de llamada en las compañías A y B entre los minutos 2 y 10.

	Diferencia en costo (pesos)	Diferencia en tiempo (min)	Cociente de la diferencia del costo entre la diferencia del tiempo de llamada
Compañía A			
Compañía B			

c) Respondan con base en sus resultados.
- ¿Cómo son los cocientes entre la diferencia del costo y la diferencia del tiempo de llamada en la compañía A?

____

- ¿Cómo son los cocientes entre la diferencia del costo y la diferencia del tiempo de la llamada en la compañía B?

____

Se le llama *razón de cambio* entre dos variables a la magnitud del cambio de una con respecto de la otra, y se calcula como el cociente que resulta de dividir el cambio en una variable entre el cambio en la otra. La razón de cambio indica cuánto cambia una de las variables al modificarse la otra.

Reflexionen. ¿Cuáles son las diferencias y similitudes entre la constante de proporcionalidad de una expresión que representa una variación lineal y la razón de cambio en la gráfica que representan la misma situación?

d) A partir de la información anterior respondan.
- ¿A qué corresponde la razón de cambio en las dos compañías telefónicas?

____

- ¿En cuál de las dos compañías el costo de la llamada por minuto tiene menor costo?

____

- ¿Qué relación tiene este hecho con la pendiente de la recta en la gráfica que la representa en comparación con la pendiente de la recta de la gráfica de la otra compañía?

____

2. En equipos resuelvan lo siguiente.

a) Una pieza de cobre se calienta en un horno eléctrico. La gráfica de la figura 4.54 muestra la variación de la temperatura de la pieza de cobre en función del tiempo.
- Completen la tabla con base en la información de la gráfica.

	Incremento de la temperatura (°C)	Incremento en el tiempo (min)	Razón de cambio $\left(\frac{°C}{min}\right)$
Entre los minutos 1 al 6	500		
Entre los minutos 1 al 5		4	
Entre los minutos 1 al 4			100
Entre los minutos 2 al 4			
Entre los minutos 3 al 5			

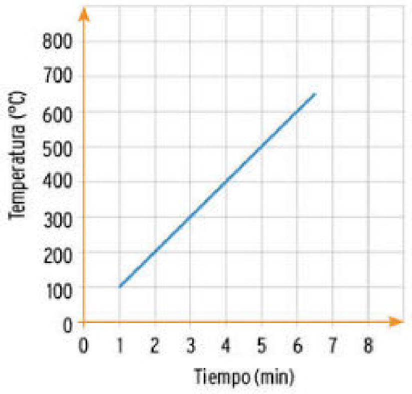


Fig. 4.54

- ¿Cómo son entre sí las razones de cambio de las distintas temperaturas con relación a los tiempos correspondientes? ____________________
- De acuerdo con la información de la gráfica, ¿qué temperatura tendrá la pieza de cobre en el minuto 7? ____________________
- ¿Qué temperatura piensan que tenía la pieza de cobre cuando se comenzó a calentar en el horno? ____________________

La razón de cambio entre la temperatura de un objeto y el tiempo que tarda en calentarse se llama *velocidad de calentamiento.*

Reflexionen. ¿Qué característica tiene la razón de cambio de una situación que se representa mediante una función lineal?

Integración

3. En grupo y con ayuda de su profesor completen los enunciados.

a) La razón de cambio entre dos variables, *a* y *b*, se calcula con la expresión:

Razón de cambio = ______________________

b) La razón de cambio es __________ cuando la gráfica asociada a una situación donde intervienen dos variables es una línea recta.

Razón de cambio y pendiente de una recta

4. En equipos analicen y resuelvan la siguiente situación.

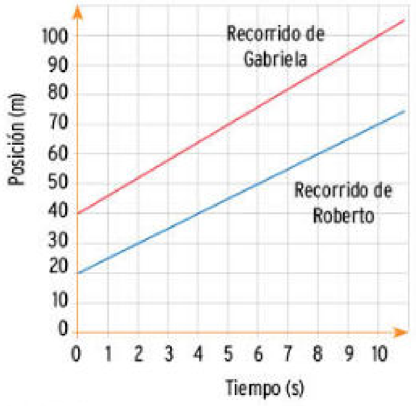


Fig. 4.55

a) Gabriela y Roberto dieron un paseo en bicicleta por un camino recto. La gráfica de la izquierda muestra la posición en la que se encontraban, en tiempos determinados. La línea roja corresponde con el recorrido de Gabriela y la línea azul, con el recorrido de Roberto.

- De acuerdo con la gráfica, ¿qué tipo de movimiento realizaron Gabriela y Roberto? ______________________
- ¿Cuál es la razón de cambio de la distancia que recorrió Gabriela en función del tiempo? ______________________
- ¿Cuál es la razón de cambio de la distancia que recorrió Roberto con respecto al tiempo? ______________________

Como estudiaste en tu curso de Física, la razón de cambio de la distancia recorrida y el tiempo empleado se llama *rapidez*.

Te invito a...

visitar la dirección electrónica www.edutics.mx/Zio e ingresar a Matemáticas 3, resolver la actividad 11 y encontrar las razones de cambio asociadas a cada recta. Compara tus procedimientos con los de tus compañeros y con ayuda de su profesor validen sus respuestas. (Consulta: 21 de enero de 2019).

- ¿A qué rapidez condujo Gabriela su bicicleta? ______________________
- ¿Cuál es la rapidez a la que Roberto condujo su bicicleta? ______________________
- Escriban una expresión algebraica que describa la posición de Gabriela durante el recorrido con respecto al tiempo. ______________________
- Escriban una expresión algebraica que describa la posición de Roberto con respecto al tiempo. ______________________
- En cursos anteriores aprendieron a calcular la pendiente de una recta. Calculen la pendiente de las rectas que representan el movimiento de Gabriela y Roberto. ______________________

- ¿Qué relación observan entre la rapidez del movimiento de Gabriela y Roberto y las pendientes de las rectas? ______________________
- ¿A qué valor corresponde m en la representación gráfica de la ecuación $y = mx + b$? ______________________
- ¿Qué valor representa b? ______________________
- Interpreten estos valores en las expresiones algebraicas con las que representaron los movimientos de Gabriela y Roberto. ______________________
- ¿Cómo será la pendiente de una recta que represente el movimiento de una persona que se desplaza con una rapidez mayor y constante a la que iba Gabriela, comparada con la pendiente de la recta asociada al movimiento de ella? ______________________

b) La gráfica de la figura 4.56 muestra la magnitud de la rapidez de una pelota de beisbol lanzada verticalmente hacia arriba con una rapidez inicial de 90 $\frac{m}{s}$.

- ¿Cómo cambia la rapidez de la pelota al aumentar el tiempo? ______________________
- Calculen la razón de cambio que corresponde a la gráfica de la recta. ______________________
- ¿Cuál es el signo de la pendiente de la recta? ______________________
- Calculen la pendiente de la recta. ______________________
- ¿Cuál es el signo de la razón de cambio de la recta asociada a esta situación? ______________________

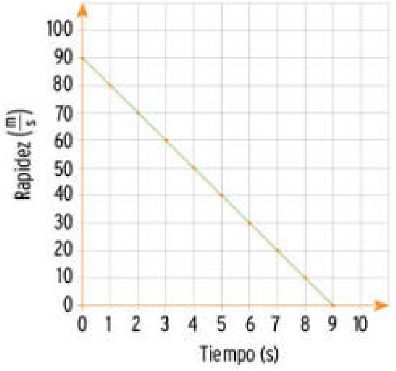


Fig. 4.56

La razón de cambio de la rapidez de un objeto con respecto del tiempo se llama *aceleración*.

Integración

5. En grupo y con ayuda de su profesor completen los enunciados.

a) Si la relación entre dos variables se representa mediante una línea recta en una gráfica, la razón de cambio es igual a __________ de la recta.

b) Si al aumentar el valor de una de las variables, la otra variable __________, la razón de cambio es positiva y la pendiente de la recta es __________.

c) Si al aumentar una de las variables, la otra variable __________, la razón de cambio es negativa y la pendiente de la recta es __________.

Consolido mis aprendizajes

1. Retoma la situación inicial y resuelve lo que se indica con base en la gráfica de la figura 4.57, la cual muestra la rapidez del recorrido de Fernández en los últimos metros de cada vuelta.

   a) Calcula la aceleración en cada caso. ______

   b) ¿Cuál es la pendiente de cada recorrido? ______

   c) ¿En qué vuelta fue mayor la razón de cambio?

   ______

   d) Describe el movimiento del automóvil en los tres casos.

   ______

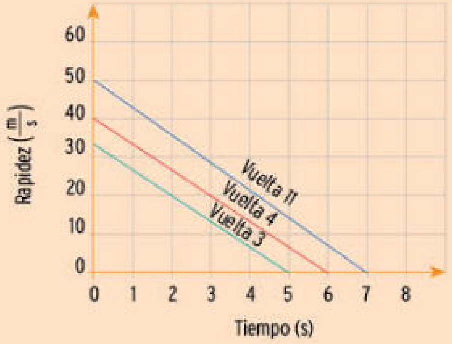


Fig. 4.57

2. Los 600 000 litros de agua de una alberca se desalojan con un flujo constante mediante una bomba hidráulica. Se sabe que a las 6 horas de comenzar el vaciado de la alberca había 525 000 litros y a las 16 horas, 400 000 litros.

   a) Traza en tu cuaderno una gráfica que represente esta situación.

   b) ¿Cuál es la razón de cambio entre la cantidad de agua en la alberca y el tiempo transcurrido?

   c) Calcula la pendiente de la gráfica. ¿Cómo es el signo de la pendiente?

   d) ¿Cuánto tiempo tardará en vaciarse por completo la alberca?

3. Un automóvil viaja con una rapidez de 30 $\frac{m}{s}$ y frena con una aceleración constante, durante 5 segundos, hasta detenerse por completo.

   a) Traza en tu cuaderno la gráfica que representa la situación y determina la pendiente.

   b) ¿Cuál es la razón de cambio entre el cambio en la rapidez del automóvil y el tiempo que tarda en detenerse por completo?

   c) ¿Cuál es el signo de la aceleración del automóvil?

Dispersión de datos

Inicio a partir de lo que sé

En parejas resuelvan lo siguiente.

Una empresa de productos lácteos hizo una prueba para medir el tiempo (en días) en que dos tipos de leche se conservan en refrigeración. La prueba se realizó con 20 unidades de cada tipo y los resultados se muestran en la siguiente tabla.

	Tiempo de conservación de cada tipo de leche (días)																			
Leche Entera Plus	3	6	3	1	10	5	6	3	2	9	5	6	4	2	10	5	6	5	1	8
Leche Nutrimax	4	5	5	6	5	4	4	5	6	6	4	6	5	6	5	4	5	5	6	4

a) Calculen el promedio de duración de cada tipo de leche.

b) De acuerdo con los datos, ¿qué tipo de leche es más conveniente comprar si se quiere guardar por varios días? Expliquen su respuesta.

Resuelvo y aprendo

Rango

1. En parejas resuelvan el problema.

   a) La siguiente tabla especifica el tiempo que algunos pacientes deben esperar para ser atendidos en dos diferentes hospitales.

Hospital	Tiempos de espera (min)										Promedio (min)
Santa Gabriela	30	21	20	24	25	30	28	30	20	22	
San Carlos	23	16	33	25	35	31	28	26	18	15	

   - ¿Cuál es el tiempo de espera, en promedio, en cada hospital? ______
   - De acuerdo con los tiempos de espera, ¿cuál elegirían para una consulta? Expliquen. ______

   b) Completen la siguiente tabla.

Hospital	Tiempo mayor de espera (min)	Tiempo menor de espera (min)	Diferencia entre los tiempos mayor y menor (min)
Santa Gabriela			
San Carlos			

La diferencia entre el mayor y el menor de los datos de una muestra se llama *rango*.

- ¿En qué hospital es mayor el rango? ____________________
- Supongan que en otro hospital el rango en los tiempos de espera es mayor que en los anteriores. ¿Qué significaría ese resultado? ____________________
- ¿Qué significaría un rango menor a los anteriores en los tiempos de espera?

____

Comparen sus respuestas en grupo y, si presentan diferencias, discútanlas y acuerden las respuestas correctas.

La *dispersión* o *variabilidad* de un conjunto de datos corresponde a la diferencia entre ellos, es decir, qué tan alejados o cercanos están entre sí los datos o con respecto a su media aritmética. El *rango* es una medida de la dispersión.

Integración

2. En grupo, con ayuda de su profesor, expliquen el significado del rango en un conjunto de datos. Escriban la explicación en su cuaderno.

Desviación media

3. En parejas resuelvan este problema.

a) Un electricista quiere determinar el estado de dos tomas de corriente. Como el voltaje presenta variaciones, decide hacer mediciones durante el día y obtener un promedio; los datos que obtuvo se registraron en la siguiente tabla. Calculen las medias aritméticas y escriban los resultados donde corresponde. ¿Qué tan alejados están del promedio los valores que midió el electricista?

Medición	Voltaje medido en las tomas de corriente	
	Toma A (V)	Toma B (V)
1	130	127
2	120	125
3	115	127
4	143	127
5	127	129
Media aritmética		

- Propongan un procedimiento para responder la pregunta; preséntenlo y explíquenlo ante el grupo. Con ayuda de su profesor analícenlos y establezcan cuáles son más adecuados para contestar la pregunta.

Otra medida de dispersión es la *desviación*, que corresponde al valor absoluto de la diferencia entre los valores de una muestra y la media aritmética de todos los valores, es decir:

$$D = |x_i - \bar{x}|$$

donde D es la desviación, x_i es cada valor de la muestra, $\bar{x}$ la media aritmética o promedio y las barras || significan valor absoluto.

- Calculen, para cada toma, la desviación de cada dato respecto a la media.

Toma de corriente *A*		
Voltaje (V)	|Voltaje − Media|	Desviación
130	|130 − 127| = 3	3
120	| − 127| =	7
115		
143		
127		

Toma de corriente *B*		
Voltaje (V)	|Voltaje − Media|	Desviación
127	|127 − 127| = 0	0
125		
127		
127		
129		

- Describan en su cuaderno cómo es la separación o desviación de los voltajes respecto a la media en cada toma de corriente.
- Calculen el promedio de las desviaciones.

Toma de corriente *A*: ____________ Toma de corriente *B*: ____________

Estos últimos valores se conocen como *desviación media* (DM).

- Analicen los valores de la desviación media que obtuvieron y relaciónenlos con las diferencias entre cada valor del voltaje y el promedio para cada toma de corriente. ¿Qué observan? Respondan en su cuaderno.
- ¿Qué relación hay entre la desviación media y la dispersión de los datos?

A partir de los resultados anteriores podemos afirmar que la mayoría de los datos obtenidos se encuentran dentro del rango:

Media aritmética ± desviación media.

- Así, para la toma de corriente *B*, la mayoría de los voltajes se encuentran entre: 127 ± ________ V; es decir, entre ________ V y 127.8 V.

Integración

4. En grupo, con ayuda de su profesor, expliquen el significado de la desviación media en un conjunto de datos. Escriban la explicación en su cuaderno.

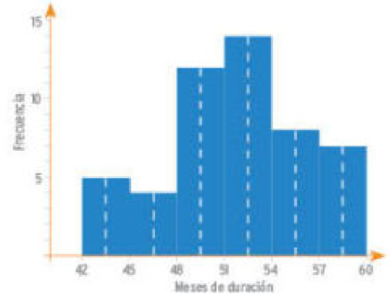


Fig. 4.58

5. En equipos resuelvan la siguiente situación.

a) En una prueba de control de calidad se registró la duración, en meses, de varios acumuladores para autos. Se quiere saber el promedio de duración y qué tanto puede variar ese tiempo.

- ¿Qué cantidades se deben calcular? ____________________
- Completen las primeras cuatro columnas de la siguiente tabla usando los datos del histograma.

Intervalo (meses)	Marca de clase	Frecuencia	Marca de clase × frecuencia	Desviación = |marca de clase − Media|	Desviación × frecuencia
42 − 45	43.5	5	(43.5)(5) = 217.5	|43.5 − 51.72| = 8.22	(8.22)(5) = 41.1
45 − 48					

- ¿Cuántos acumuladores se probaron en total? ____________________
- Determinen la media aritmética de los tiempos de duración de los acumuladores. Consideren las marcas de clase y el peso de cada una. ____________________
- La *marca de clase* es el valor que representa a todos los elementos de un intervalo y, por tanto, es el que permite calcular la *desviación* en un conjunto de datos. Calculen la desviación para cada intervalo de datos y anoten sus resultados en la quinta columna de la tabla.
- Cada desviación de las anteriores corresponde a un solo dato representativo de todo el intervalo, por lo que para determinar su peso en el conjunto de datos es necesario multiplicarla por la frecuencia, es decir, por la cantidad de datos que corresponden a ese intervalo. Completa la sexta columna de la tabla.
- De esta manera, la *desviación media* es el promedio de los productos de las *desviaciones* por las frecuencias considerando el total de datos. Calculen la desviación media: ____________________

Como observan, el cálculo de la desviación media para datos aislados y para datos agrupados es distinto; sin embargo, en ambos casos se trata de una medida de la dispersión de los datos.

Rango y desviación media

6. En parejas resuelvan los siguientes problemas.

a) En un restaurante se estudió el número de comensales que asisten durante el día; la gráfica muestra esos resultados.

Fig. 4.59

- En su cuaderno realicen los cálculos necesarios y determinen las cantidades que se solicitan.
  - ¿A qué hora en promedio asisten los comensales al restaurante? ____________
  - Determinen el rango de horarios. ____________________
  - Calculen la desviación media. ____________________
  - Por tanto, podemos decir que la mayoría de los comensales asisten entre las ________ y las ________
- ¿Qué medida de dispersión describe apropiadamente el comportamiento de los datos? Expliquen su respuesta.

____

____

b) Sofía, Humberto y Luis compiten en una prueba de tiro con arco con una diana como la de la figura 4.60. En cada lanzamiento obtienen el número de puntos que señala el número de la zona en la que aciertan. A partir de la información de las gráficas, completen la tabla.

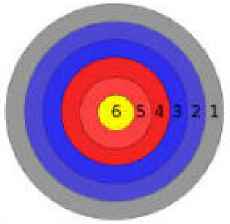


Fig. 4.60

Fig. 4.61

Competidor	Luis	Humberto	Sofía
Puntos			
Media aritmética			
Rango			
Desviación media			

- ¿Cuál es la única cantidad que cambia para cada arquero? ______________
- ¿Cómo se relaciona la magnitud de la desviación media con la forma de las gráficas?

____

____

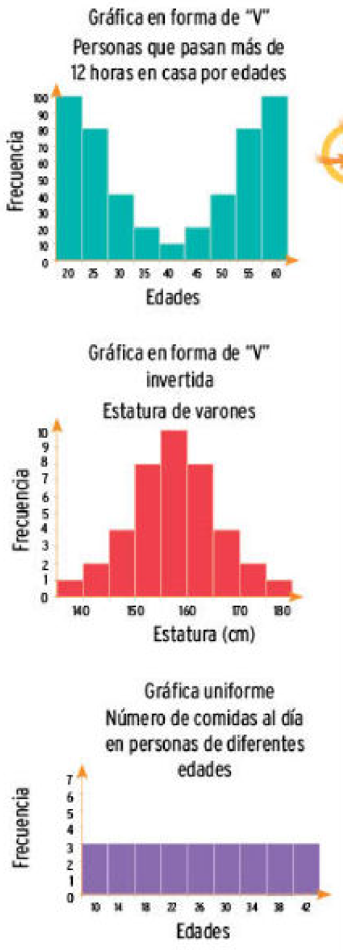


Fig. 4.62

Integración

7. En grupo, con ayuda de su profesor, completen las siguientes afirmaciones.

   a) El rango y la desviación media miden ____________ de los datos de un conjunto.

   b) Para calcular el __________ sólo se usan los datos extremos del conjunto, mientras que para la ________________________ se usan todos los datos.

   c) El ____________ indica la extensión que alcanzan los datos y la desviación media, cómo están distribuidos.

Consolido mis aprendizajes

1. Retoma la situación inicial y resuelve lo siguiente.

   a) Calcula la media aritmética, el rango y la desviación media de la distribución de los datos para cada tipo de leche.

	Media aritmética	Rango	Desviación media
Leche Entera Plus			
Leche Nutrimax			

   b) Escribe tu propia interpretación de los datos obtenidos.

   ____

   ____

   c) Con base en tu respuesta, ¿conservarías o cambiarías tu elección en cuanto al tipo de leche que comprarías? Explica.

   ____

2. De las gráficas de la figura 4.62, sin hacer cálculos, indica cuál presenta una desviación media menor, mayor o intermedia. Explica tu respuesta.

   ____

   ____

En grupo compartan sus respuestas y argumentos y valídenlos con apoyo del profesor.

Habilidades digitales

Pendiente de una recta

De nuevo trabajaremos con un programa matemático interactivo de dibujo por computadora, con el que identificarás la relación entre el valor del ángulo que forma una recta con la abscisa, así como la razón entre el cateto opuesto y el cateto adyacente de cualquier triángulo rectángulo que se forma con la recta. ¿Listo? ¡Comenzamos!

1. Abre el programa, da clic en el triángulo inferior del ícono y elige la opción *Deslizador*. Posiciona el cursor en cualquier lugar del espacio de trabajo: aparecerá una ventana con las opciones del deslizador. Asígnale un nombre, por ejemplo "m", y escribe un *valor mínimo* de 0.5, un *valor máximo* de 2, un *incremento* de 0.001 (figura 1) y oprime *Aplica*.

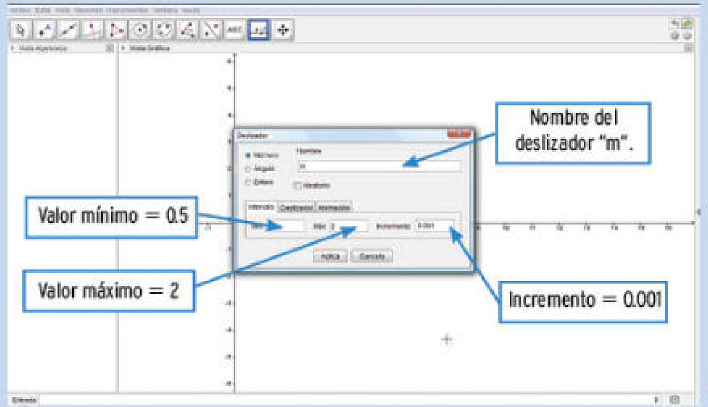


Fig. 1

Escribe en el campo *Entrada* la ecuación $y = m*x$ y presiona la tecla *Entrar* para generar una recta que pasa por el origen de las coordenadas (figura 2).

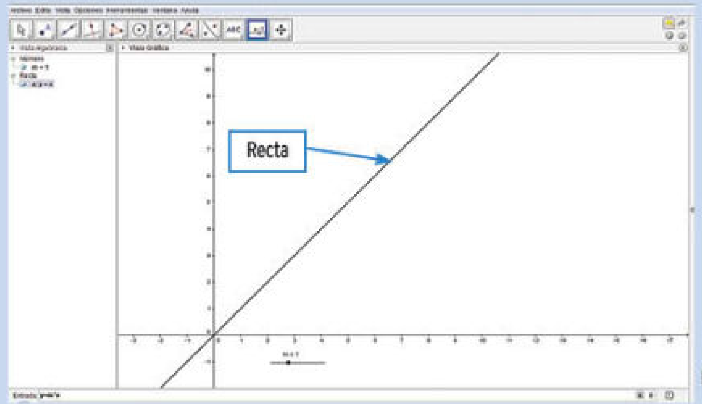


Fig. 2

Haz clic en el triángulo inferior del ícono , elige la opción *Nuevo Punto* y dibuja dos puntos sobre la recta en la posición que prefieras. Da clic en el triángulo inferior del ícono , escoge la opción y traza una recta paralela al eje *x* que pase por el punto cuyo valor de su ordenada sea menor. Haz clic en , elige la opción y traza una recta perpendicular al eje *x* que pase por el punto cuyo valor de su ordenada sea mayor (figura 3). Da clic en y, con la herramienta , dibuja el punto de intersección de las dos rectas. De esta manera obtendrás tres puntos unidos por las rectas.

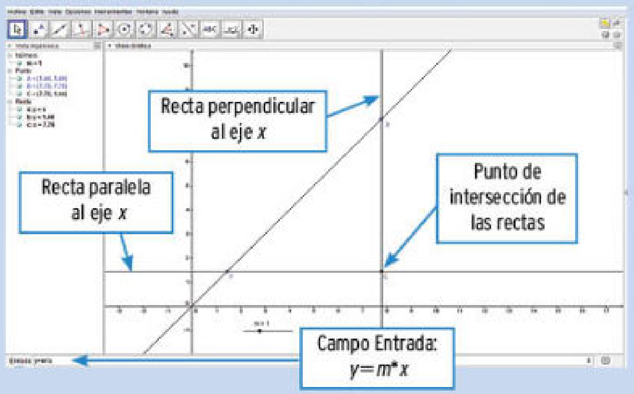


Fig. 3

2. Con la herramienta elige la opción *Polígono* y traza el triángulo que se forma al unir los tres puntos (figura 4). Oculta las rectas paralela y perpendicular al eje *x*; para ello posiciona el cursor sobre una de las rectas, por ejemplo, la paralela a *x*, da clic con el botón secundario y desactiva la opción *Muestra objeto* ; haz lo mismo para la recta perpendicular. En la pantalla sólo tendrás el triángulo, la recta que pasa por el origen de las coordenadas y el deslizador.

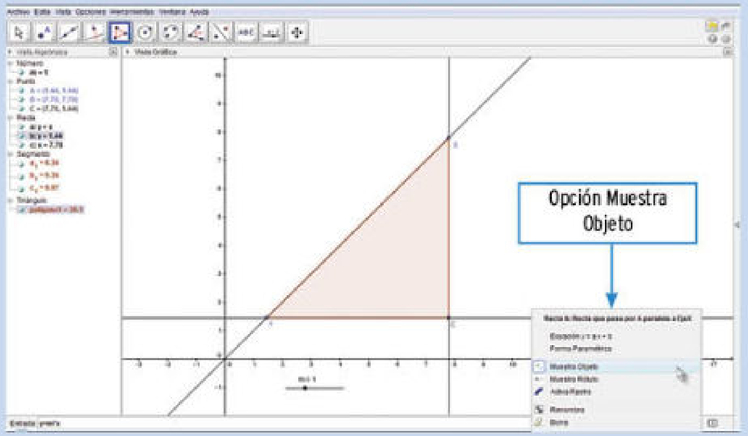


Fig. 4

3. Haz clic en y selecciona la opción *Ángulo*. Dibuja los ángulos interiores del triángulo y el ángulo que forma la recta con el eje *x*.

4. Completa la primera fila de la tabla 1 con los datos que muestra la vista algebraica de la pantalla. Para saber a qué cateto corresponde cada valor de la vista algebraica, da clic en el ícono y escoge la opción *Elige y mueve*; posiciona el cursor sobre el cateto del que desees conocer su medida y el valor aparecerá resaltado en la vista algebraica.

Longitud del cateto opuesto (*CO*)	Longitud del cateto adyacente (*CA*)	Cociente $\left(\frac{CO}{CA}\right)$	Valor de *m*

Tabla 1

5. En la herramienta escoge la opción *Elige y Mueve*, selecciona un vértice del triángulo y muévelo. Con los nuevos datos de la vista algebraica, completa la segunda fila de la tabla anterior. Mueve de nuevo los vértices, con estos datos llena la tercera fila de la tabla y responde.

a) ¿Qué pasa con el valor de la tangente del ángulo? ________________

b) ¿Qué sucedería si el triángulo que se construye sobre la recta no fuera un triángulo rectángulo? ________________

6. Mueve el deslizador a la posición que desees (figura 5) y con los datos que obtengas en la vista algebraica, calcula los valores de seno, coseno y tangente. Registra tus resultados en la tabla 2.

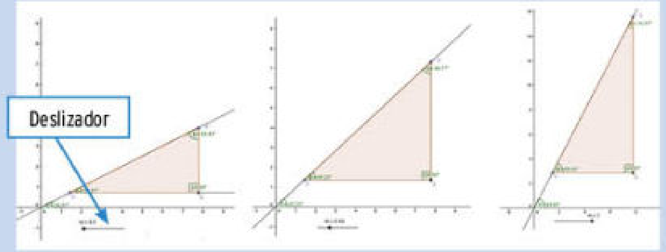


Fig. 5

Ángulo	Seno	Coseno	Tangente	Valor de *m*

Tabla 2

a) ¿Cómo cambian los valores del seno, el coseno y la tangente al modificar la pendiente de la recta? ________________

b) ¿Sucederá lo mismo si cambias el ángulo que forma la recta con el eje *x*? ________

Ponte a prueba PISA

1. Fabián construye cuadrados con palillos. En cada paso añade palillos para formar el siguiente cuadrado como muestra la imagen. De esta manera, en el primer paso el cuadrado se forma con 4 palillos y en el segundo, con 12.

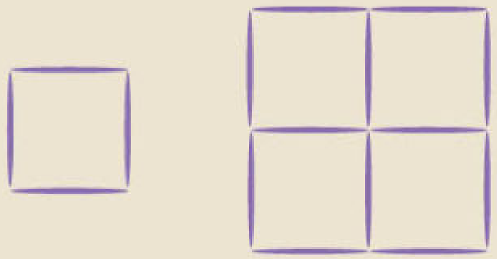


Fig. 1

Paso 1 Paso 2

a) ¿Cuántos palillos debe añadir Fabián para formar el cuadrado en el paso 12?

____

2. En un momento del día, el monumento a la Independencia en la Ciudad de México, mejor conocido como *El Ángel*, con una altura de 52 m, proyecta una sombra que también mide 52 m.

a) ¿Cuál es el ángulo de elevación del Sol sobre el horizonte? ______________

b) Se llama equinoccio al momento en que el Sol se sitúa en el plano del ecuador terrestre. Cuando se produce un equinoccio, el día y la noche tienen igual duración. Si el día en que se midió la sombra del monumento coincide con el día en que se produce un equinoccio, y ese día el Sol salió a las 6 de la mañana, ¿en qué momentos se pudo realizar la medición de la sombra?

____

3. Responde con base en la figura.

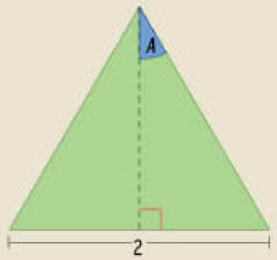


Fig. 2

a) ¿A cuánto equivalen las razones trigonométricas del ángulo A en el triángulo rectángulo que se construye a partir del triángulo equilátero de la figura 2?

- sen A = __________ • cos A = __________ • tan A = ______

4. En dos agencias de renta de automóviles se cobran diferentes tarifas de acuerdo con los kilómetros que recorre un automóvil durante el tiempo en que se alquila. Al comparar las tarifas para un automóvil del mismo modelo y marca se obtuvo la información que presenta la gráfica.

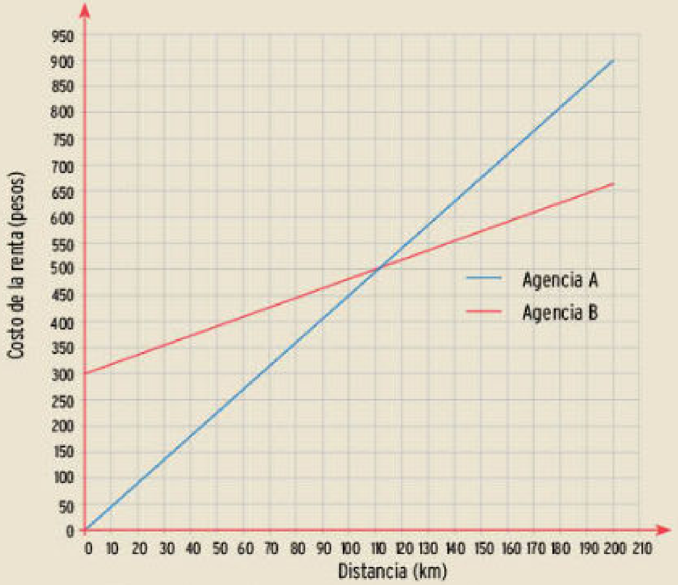


Fig. 3

a) ¿Cuáles son las condiciones de la tarifa que cobra la agencia A?

____

b) ¿Cuáles son las condiciones de la tarifa que cobra la agencia B?

____

c) Explica en qué condiciones conviene rentar un automóvil en cada agencia.

Agencia A: ______________________________

Agencia B: ______________________________

5. El número de horas a la semana que cada alumno de los tres grupos de tercer grado de la secundaria Quetzalcóatl estudia se muestra en la tabla siguiente.

Grupo A	Grupo B	Grupo C
17, 13, 10, 8, 4, 24, 12, 14, 5, 25, 8, 6, 16, 12, 18, 14, 12, 10, 7, 12, 10, 12, 10, 24, 18, 20, 15, 20, 20, 10, 8, 18, 18, 9, 4, 16, 10, 9.	7, 5, 15, 11, 17, 13, 11, 9, 8, 11, 19, 15, 12, 10, 6, 24, 14, 16, 7, 25, 9, 17, 19, 8, 5, 15, 9, 10, 9, 21, 11, 12, 11, 24, 3.	11, 13, 11, 25, 3, 19, 21, 16, 21, 21, 8, 19, 18, 10, 4, 17, 10, 10, 9, 20, 7, 7, 15, 13, 17, 15, 11, 11, 6, 13, 18, 14, 11, 9, 5, 25, 13.

a) ¿Qué grupo de alumnos dedica más horas para estudiar?

- Grupo A
- Grupo B
- Grupo C

b) ¿En cuál de los tres grupos el tiempo de estudio es más uniforme?

- Grupo A
- Grupo B
- Grupo C

Ponte a prueba ENLACE

1. ¿Cuál de las siguientes expresiones algebraicas permite encontrar el enésimo término de la sucesión: 4, 7, 14, 25, 40,...?

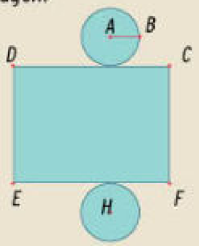
   a) $t_n = 3n^2 + 3n - 4$

   b) $t_n = 2n^2 + 3n - 5$

   c) $t_n = 2n^2 + 3n - 1$

   d) $t_n = 2n^2 - 3n + 5$

2. ¿Cuál debe ser la medida del segmento $\overline{CD}$ en el desarrollo plano del cilindro de la imagen?



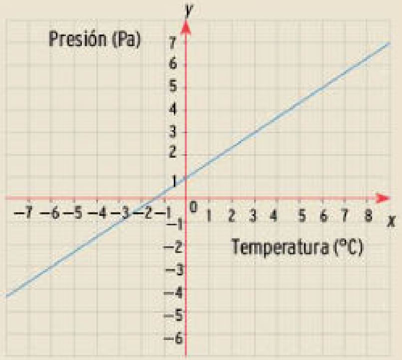
   a) $\overline{AB}\pi$

   b) $\frac{\overline{AB}}{2}\pi$

   c) π

   d) $2\overline{AB}\pi$

3. La presión que ejerce un gas sobre las paredes del recipiente que lo contiene depende de su temperatura cuando su volumen es constante. La gráfica muestra la relación entre estas variables. Determina la razón de cambio entre el volumen y la temperatura.



   a) $\frac{1}{3}$

   b) $\frac{2}{3}$

   c) $-\frac{1}{3}$

   d) $\frac{3}{2}$

4. La tarifa por el servicio de taxi en la Ciudad de México está representada por la ecuación $T = 8.74 + 1.07d$, donde T es la tarifa, \$8.74 por "banderazo", y d representa tramos de recorrido de 250 m. ¿Qué valor corresponde con la razón de cambio entre las variables involucradas?

   a) 8.74

   b) 1.07

   c) $\frac{T}{d}$

   d) $\frac{1.07}{8.74}$

5. Las calificaciones de un alumno en el tercer bimestre escolar fueron:

   8, 9, 7, 10, 7, 9, 8, 10.

   ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera según esas calificaciones?

   a) La desviación media es igual al rango.

   b) El rango es 4.

   c) La desviación media es 1.

   d) La desviación media es 8.5.

Ahora sé

Autoevaluación

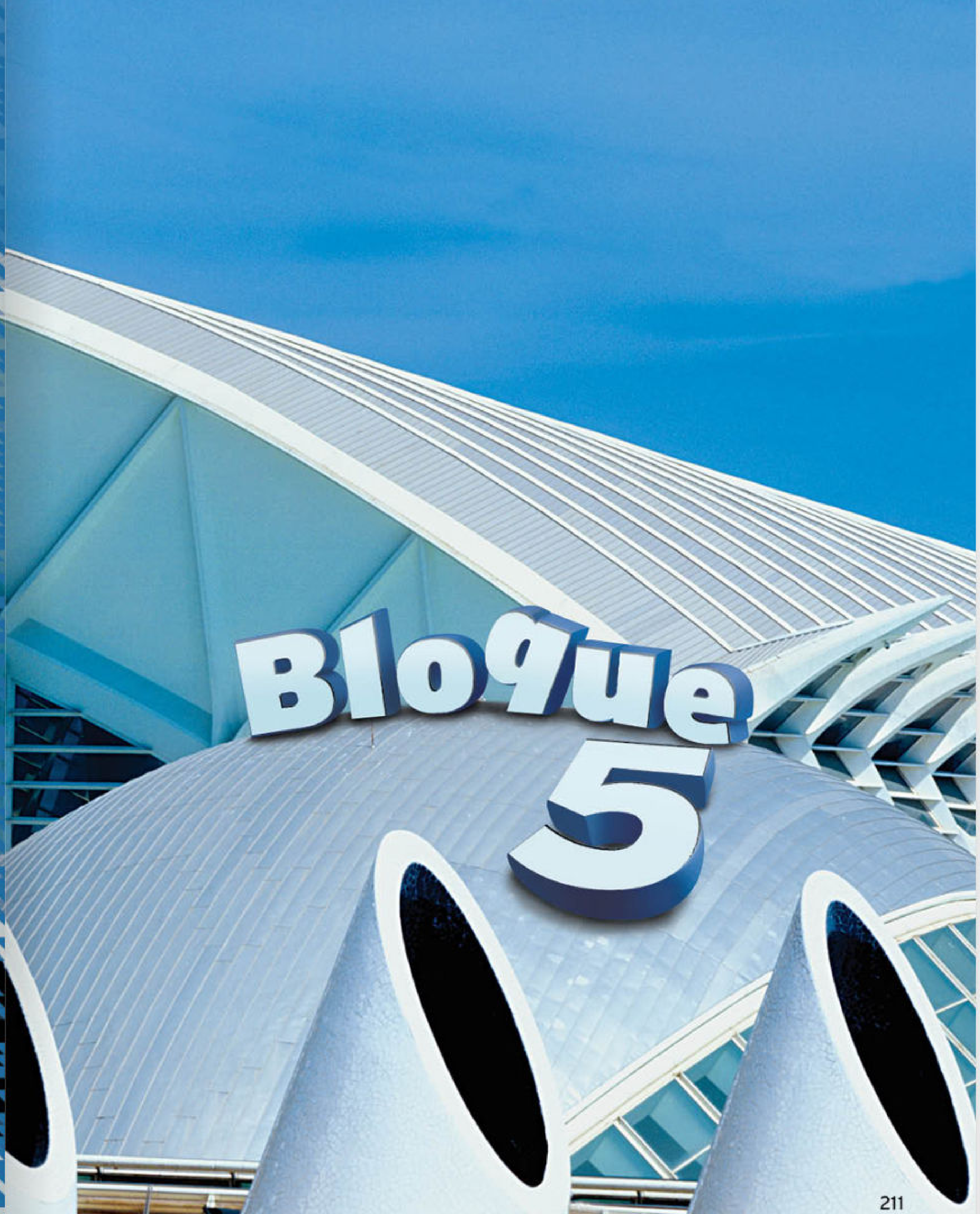
Marca con una ✓ la opción que demuestre tus alcances correspondientes a los aprendizajes esperados y responde la pregunta.

Contenido	¿Logré el aprendizaje? Sí	No	¿Cómo puedo mejorar?
Obtengo una expresión general cuadrática para definir el enésimo término de una sucesión.			
Analizo las características de los cuerpos que se generan al girar sobre un eje, un triángulo rectángulo, un semicírculo y un rectángulo. Construyo desarrollos planos de conos y cilindros rectos.			
Analizo las relaciones entre el valor de la pendiente de una recta, el valor del ángulo que se forma con la abscisa y el cociente del cateto opuesto sobre el cateto adyacente.			
Analizo las relaciones entre los ángulos agudos y los cocientes entre los lados de un triángulo rectángulo.			
Explico y uso las razones trigonométricas seno, coseno y tangente.			
Calculo y analizo la razón de cambio de un proceso o fenómeno que se modela con una función lineal. Identifico la relación entre dicha razón y la inclinación o pendiente de la recta que la representa.			
Mido la dispersión de un conjunto de datos mediante el promedio de las distancias de cada dato a la media (desviación media). Analizo las diferencias de la "desviación media" con el "rango" como medidas de la dispersión.			

Al terminar revisa la tabla con tu profesor. Después, en grupo y con el apoyo de su profesor, elaboren una estrategia de trabajo para que mejoren su desempeño.

Eje	Contenido	Aprendizajes esperados
Sentido numérico y pensamiento algebraico	**Patrones y ecuaciones** • Resolución de problemas que implican el uso de ecuaciones lineales, cuadráticas o sistemas de ecuaciones. Formulación de problemas a partir de una ecuación dada.	• Resuelve y plantea problemas que involucran ecuaciones lineales, sistemas de ecuaciones y ecuaciones de segundo grado.
Forma, espacio y medida	**Medida** • Análisis de las secciones que se obtienen al realizar cortes a un cilindro o a un cono recto. Cálculo de las medidas de los radios de los círculos que se obtienen al hacer cortes paralelos en un cono recto. • Construcción de las fórmulas para calcular el volumen de cilindros y conos, tomando como referencia las fórmulas de prismas y pirámides. • Estimación y cálculo del volumen de cilindros y conos o de cualquiera de las variables implicadas en las fórmulas.	• Resuelve problemas que implican calcular el volumen de cilindros y conos o cualquiera de las variables que intervienen en las fórmulas que se utilicen. Anticipa cómo cambia el volumen al aumentar o disminuir alguna de las dimensiones.
Manejo de la información	**Proporcionalidad y funciones** • Análisis de situaciones problemáticas asociadas a fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas, en las que existe variación lineal o cuadrática entre dos conjuntos de cantidades. **Nociones de probabilidad** • Análisis de las condiciones necesarias para que un juego de azar sea justo, con base en la noción de resultados equiprobables y no equiprobables.	• Lee y representa, gráfica y algebraicamente, relaciones lineales y cuadráticas. • Resuelve problemas que implican calcular la probabilidad de eventos complementarios, mutuamente excluyentes e independientes.

La Ciudad de las Artes y las Ciencias es un complejo arquitectónico y cultural en Valencia, España, diseñado por Santiago Calatrava y Félix Candela. La obra está inspirada en figuras cónicas y esféricas, así como en secciones cónicas como parábolas, elipses e hipérbolas.



¡Hágalo con álgebra!

Inicio a partir de lo que sé

En parejas resuelvan la situación que se presenta.

Con una lámina rectangular de metal de 324 cm de largo se requiere hacer una canaleta para desviar agua. Para dar forma a la canaleta, la lámina se debe doblar a lo ancho en tres partes iguales, de modo que el ancho y el alto de la canaleta tengan la misma longitud, como se muestra en la figura 5.1.

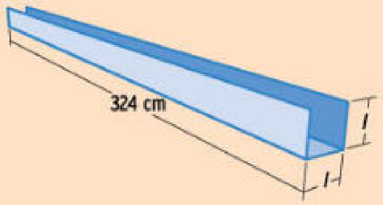


Fig. 5.1

a) ¿Qué expresión algebraica representa el volumen de agua que puede contener la canaleta?
b) ¿Cuánto debe medir el ancho de la lámina para que el volumen de agua sea de 8 100 cm^3?

Resuelvo y aprendo

Resolución de problemas

1. En parejas respondan lo siguiente.

a) El bambú y el kelp, una especie de alga, son dos plantas de crecimiento rápido, pero el bambú crece dos veces más rápido que el kelp. Si el bambú puede crecer hasta 94 cm en un día, ¿cuánto puede crecer el kelp?

- Escriban una ecuación o sistema de ecuaciones que exprese esta situación.

  ____

- Resuelvan la ecuación o el sistema de ecuaciones e indiquen cuánto puede crecer el kelp en un día. ______________________________

b) En la elección a la presidencia municipal de Valparaíso participaron dos candidatos. El candidato ganador recibió 11 206 votos más que su rival. En total se emitieron 18 298 votos.

- Escriban una expresión que represente el número de votos que recibió el candidato perdedor en términos del número de votos que recibió el ganador.

  ____

- Escriban la ecuación asociada a esta situación en términos del número de votos que recibió cada candidato y el total de votos emitidos.

  ____

- ¿Cuántos votos recibió cada candidato? ______________________________

c) Gustavo compró dos lotes de zapatos. El primer lote contenía 50 pares y por cada uno pagó $400.00; del segundo lote pagó $500.00 por cada par. Después vendió todos los zapatos a $770.00 pesos el par y obtuvo una ganancia de $34 700.00.

- Escriban una expresión algebraica que represente la cantidad que invirtió Gustavo en todos los zapatos. ______________________________
- Escriban una expresión algebraica que represente la cantidad de dinero que Gustavo obtuvo por la venta de todos los zapatos. ______________________________
- Escriban la ecuación que relacione la ganancia de Gustavo con su inversión y con la venta de todos los zapatos. ______________________________
- ¿Cuántos pares de zapatos tenía el segundo lote?

d) En cada situación de los incisos anteriores sustituyan la solución que encontraron en la ecuación asociada para comprobar que se cumpla la igualdad.

Escriban en su cuaderno el procedimiento que siguieron para resolver cada situación, compárenlo con el de otras parejas y verifíquenlos con apoyo de su profesor.

2. En equipos respondan lo siguiente.

a) Gabriela lanzó una pelota hacia arriba con una velocidad inicial de 10 m/s desde una altura de un metro del suelo. La altura h a la que se encuentra la pelota respecto al suelo t segundos después de lanzarla está dada por la ecuación:

$$h = -5t^2 + 10t + 1.$$

- Completen la tabla a partir de la ecuación.

Tiempo (segundos)	0	0.25	0.5	0.75	1	1.25	1.5	1.75	2
Altura (metros)									

- De acuerdo con los datos de la tabla, ¿en qué momento la pelota alcanza su altura máxima? ______________________________
- ¿Cuánto tiempo tarda en caer al suelo después de ser arrojada?

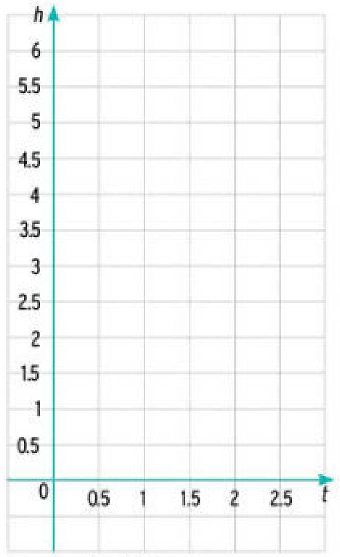


Fig. 5.2

- Tracen la gráfica de la ecuación en la figura 5.2 y verifiquen que sus respuestas sean correctas.

b) La figura 5.3 muestra un cuadrado y un rectángulo. El ancho del rectángulo es igual al lado del cuadrado y la suma de sus áreas es igual a 4 cm^2.

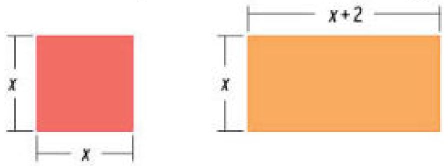


Fig. 5.3

- Escriban una expresión que represente la suma del área de las dos figuras en términos de la medida de uno de los lados del cuadrado.

___

- Determinen las dimensiones de ambas figuras geométricas.

c) En un parque rectangular, que mide 72 m de largo por 54 metros de ancho, hay un camino alrededor del jardín central como ilustra la figura 5.4. El camino tiene un ancho uniforme y su área es igual al área del jardín.

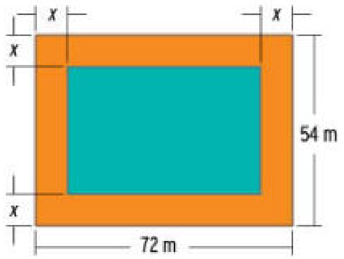


Fig. 5.4

- Escriban una expresión que represente el área del jardín.

___

- Escriban una ecuación cuadrática que corresponda al hecho de que el área del camino es igual a la del jardín.

___

- ¿Cuánto mide el ancho del camino que rodea al parque?

- Sustituyan en la ecuación anterior la medida del ancho del camino y comprueben que se cumple la igualdad.

Escriban en su cuaderno los procedimientos que usaron para resolver las situaciones de los tres incisos anteriores. Compárenlos con los de otro equipo y redacten una estrategia para resolver este tipo de problemas.

3. En parejas resuelvan las siguientes situaciones.

a) Ernesto necesita un foco para su pecera y requiere mantenerlo encendido todo el tiempo. Un foco incandescente cuesta 10 pesos y mantenerlo encendido, cuatro pesos cada tres días; una lámpara fluorescente vale 40 pesos, y que permanezca encendida durante tres días tiene un costo de un peso.

- A partir del planteamiento completen la tabla.

Tiempo (días)	0	10	20	30	40	50	60
Costo total para el foco incandescente (pesos)							
Costo total para el foco fluorescente (pesos)							

- ¿Cuál tipo de foco requiere una inversión inicial menor? ___
- Escriban el sistema de ecuaciones asociado a esta situación.

- ¿Cuántos días deben transcurrir para que el costo por compra y uso de los dos tipos de focos sea el mismo? ___

- Tracen las gráficas correspondientes a las ecuaciones en el plano cartesiano de la figura 5.5 y comprueben que su respuesta anterior sea correcta.
- ¿Qué tipo de foco tiene un costo menor a largo plazo?

___

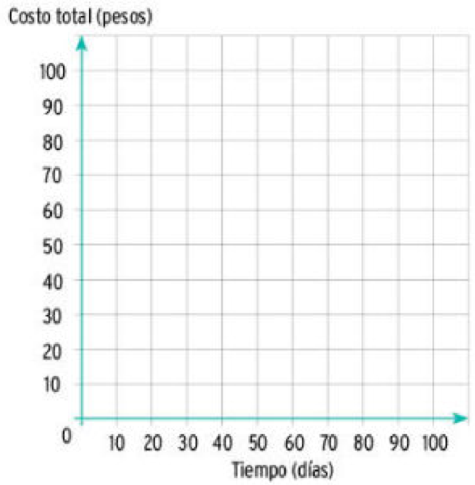


Fig. 5.5

b) Anita recibió 33 billetes al retirar efectivo de su cuenta bancaria en un cajero automático. Los billetes eran de \$200.00 y \$100.00, y en total recibió \$5 300.00.

- Escriban el sistema de ecuaciones asociado a esta situación.

- ¿Cuántos billetes recibió de cada denominación? ___

Escriban en su cuaderno el procedimiento que utilizaron para resolver este problema, compárenlo con el de sus compañeros y verifiquen si son correctos.

c) Un observador se encuentra a 16 m de un globo aerostático, el cual comienza a subir con una rapidez de 2 m/s (ver figura 5.6).

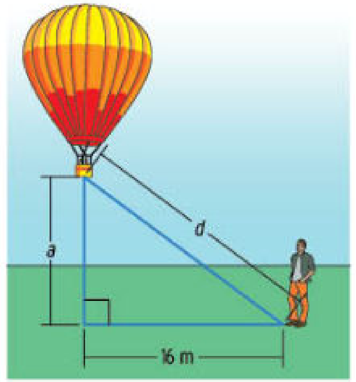


Fig. 5.6

- Escriban la ecuación que relaciona la distancia (d) entre el observador y el globo en términos de la altura (a) del globo. ______
- Escriban la ecuación que expresa la altura del globo en términos de su rapidez y del tiempo transcurrido. ______
- ¿Cuál es la distancia entre el observador y el globo 6 segundos después de que inició su ascenso? ______
- Describan el procedimiento que siguieron para resolver el problema, compárenlo con otro equipo y discutan si son correctos. Validen sus resultados con apoyo de su profesor.

______

______

Formulación de problemas a partir de una ecuación dada

4. En parejas resuelvan lo siguiente.

Te invito a...

visitar la dirección electrónica www.edutics.mx/Zio e ingresar a Matemáticas 3 para resolver la actividad 45. Compara tus procedimientos con los de tus compañeros y con ayuda de su profesor validen sus respuestas. (Consulta: 21 de enero de 2019).

a) Escriban en su cuaderno un problema que se represente con la siguiente ecuación.

$$3z + 2(z + 4) = 88$$

b) Anoten en su cuaderno un problema al que se asocie la siguiente ecuación.

$$m^2 + 7m - 10 = 0$$

c) Intercambien sus problemas con otra pareja y resuélvanlos. Verifiquen sus respuestas y procedimientos.

d) Relacionen el sistema de ecuaciones con el número del enunciado del problema que le corresponde.

Sistema de ecuaciones asociado	Enunciado del problema
( ) $2x + y = 30$ $2y - x = 20$	1. La suma de dos números es 30. El número más grande es una unidad menor que el doble del número menor.
( ) $y = x + 30$ $y = 7x - 30$	2. El doble de la edad de Andrés más la edad de Rosa suman 30 años, y el doble de la edad de Rosa menos la edad de Andrés son 20 años.
( ) $x + y = 30$ $2x - y = 1$	3. El precio de una manzana más 30 pesos es igual al costo de una sandía. El costo de siete manzanas menos 30 pesos tienen el mismo precio que el de una sandía.

- Resuelvan los sistemas de ecuaciones. Comprueben que las soluciones sastisfagan las condiciones del enunciado correspondiente.

e) Inventen un problema que tenga asociado el siguiente sistema de ecuaciones. Escríbanlo en su cuaderno y pidan a otra pareja que lo resuelva. Verifiquen los resultados con ayuda de su maestro.
- $2n + 1 = m$
- $4n - 1 = m$

Consolido mis aprendizajes

1. En parejas resuelvan esta variante de la situación inicial.

a) Para reducir la pérdida de agua se decidió hacer la canaleta de forma que sus cuatro lados queden cubiertos. La canaleta tendrá, entonces forma de un prisma rectangular de altura a, pero sin las bases, que tendrían forma de cuadrado con lados de medida l, como se muestra en la figura 5.7. Se espera que el agua ocupe un volumen de 0.25 m^3 y el área de la superficie de la canaleta sea de 2 m^2.

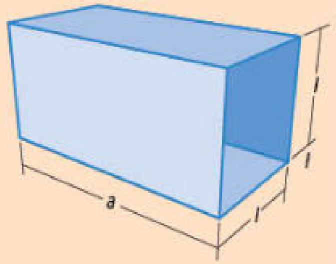


Fig. 5.7

- Escriban las ecuaciones que representan el volumen y la superficie de la canaleta en términos de a y l.

______

- ¿Cuánto deben medir l y a?

2. Un carpintero necesita cortar una tabla de 1.4 m en tres partes, de modo que la segunda parte tenga el doble de largo que la primera, y la tercera sea el doble de largo que la segunda. ¿Qué longitud tendrá la parte más grande?

______

3. En un marco de 3 cm de ancho hay una fotografía que tiene 1 cm más de largo que de ancho. Si el área del marco es 126 cm^2, ¿cuánto miden el ancho y el largo de la fotografía?

______

4. En un videojuego se ganan 100 puntos por cada nivel que se completa y se pierden 40 puntos por cada nivel que no se completa. ¿Cuántos niveles se completaron si después de 25 pruebas se obtuvieron 1 380 puntos?

______

Comparen sus respuestas con otras parejas y, si se presentan errores, analícenlos y corríjanlos.

Cortes a cilindros y conos

Inicio a partir de lo que sé

En equipos analicen el problema y respondan.

El artesano español Francisco Treceño es conocido por hacer con madera figuras llamadas conos de Apolonio; la figura 5.8 muestra el aspecto de una de sus obras.

Estos conos son como rompecabezas: al separar una de las partes de madera oscura de una de las claras, queda una figura plana (como si se hiciera un corte).

Fig. 5.8

a) Identifiquen todas las figuras planas que quedarán en la superficie donde se unen las piezas y dibújenlas en su cuaderno.

b) Además de las formas planas que se pueden generar con un cono de Apolonio, ¿existen otras que se pueden obtener al hacer un corte recto en un cono? Expliquen su respuesta.

Al desarmar un cono de Apolonio se extravió la pieza superior, figura 5.9.

Fig. 5.9

c) ¿Qué forma tiene esa pieza?

d) Para remplazarla se necesita conocer sus dimensiones. Si la base del cono sin la pieza superior mide 9 cm de radio, tiene una altura de 27 cm y el radio de la superficie superior es de 3 cm, ¿cuál es la altura de la pieza faltante?

Resuelvo y aprendo

Secciones de un cilindro

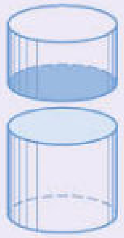
1. En parejas realicen las actividades siguientes.

a) Modelen con plastilina un cilindro recto como el que se muestra.

- Con una regla, un hilo tenso o un cúter hagan cortes para obtener los tipos de secciones que se indican en la tabla. Realicen los cortes con cuidado para no lastimarse.

Fig. 5.10

- Completen la tabla donde se analizan las secciones de corte e investiguen el nombre de cada una.

Tipo de corte	Corte	Vista plana del corte	Nombre de la sección de corte	Descripción de la figura plana que quedó al cortar
Paralelo a la base				
Oblicuo sin cortar a las bases				
Perpendicular a la base				

- Además de las figuras planas encontradas, ¿se podrían formar otras figuras al hacer cortes rectos?

____

- Si su respuesta es afirmativa, indiquen cuáles y cómo las obtendrían.

____

____

____

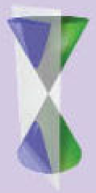
____

Oblicuo: describe un elemento geométrico inclinado, es decir, que no es ni paralelo ni perpendicular a otro dado.

Comparen su tabla con las de otras parejas e identifiquen similitudes y diferencias. Compartan también sus respuestas, valídenlas y complétenlas si es necesario.

Secciones cónicas

2. En parejas completen el cuadro y determinen qué secciones se obtienen al realizar a un cono los cortes rectos que se indican.

Tipo de corte	Corte	Vista plana del corte	Nombre de la figura plana que quedó al cortar
Paralelo a la base			
Oblicuo con una ligera inclinación con respecto a la base			Elipse
Oblicuo a la base y paralelo a una generatriz			Parábola
Perpendicular a la base considerando dos conos invertidos			Hipérbola

a) Verifiquen sus respuestas haciendo los cortes a un cono de plastilina.

b) ¿Es posible obtener una superficie triangular al hacer un corte al cono?

- Si su respuesta anterior es afirmativa, describan cómo hacer el corte.

c) ¿Podrían obtener una o más figuras geométricas distintas a las anteriores al hacer otros cortes? Si es así, describan cómo hacerlo.

Comparen en grupo sus respuestas y valídenlas con ayuda de su profesor. Si es necesario, corrijan sus errores.

Integración

3. En grupo y con la ayuda de su profesor respondan.

a) Las secciones que obtuvieron en la tabla anterior se llaman *secciones cónicas*. ¿Por qué consideran que reciben este nombre?

b) Identifica el número de cada figura geométrica con la que se obtiene según el tipo de corte que se haga a un cono.

1. **Elipse** ( ) Se obtiene con un corte inclinado en un cono sin pasar por su base.
2. **Hipérbola** ( ) Se obtiene con un corte paralelo a la base del cono.
3. **Parábola** ( ) Se obtiene con un corte paralelo a la generatriz del cono.
4. **Círculo** ( ) Se obtiene con un corte que pase por la base y que no sea paralelo a la generatriz del cono.

Medidas de los círculos que se obtienen de un cono recto

4. En equipos, realicen las siguientes actividades.

a) Construyan un cono de plastilina o migajón de 12 cm de altura y cuya base sea de 4 cm de radio. Realicen cortes paralelos a la base para que cada cono resultante tenga la altura que señala la tabla y midan el radio de la sección transversal obtenida. Con esa información completen la siguiente tabla.

Altura (cm)	Radio (cm)
12	4
11	
10	
9	
8	
7	
6	
5	
4	
3	
2	
1	
0.5	

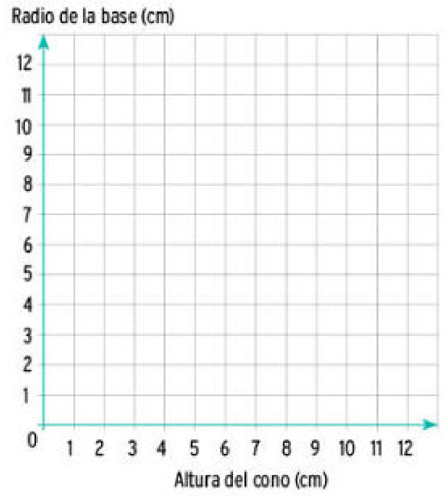
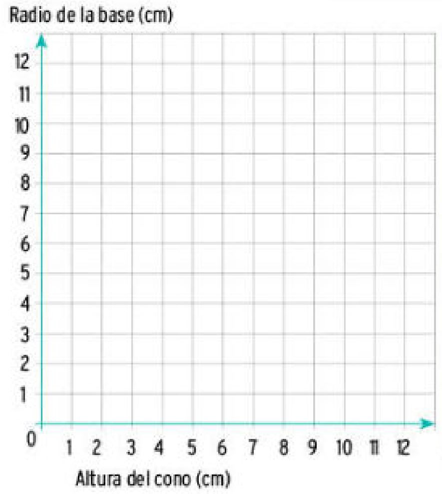


Fig. 5.11

- Tracen la gráfica con los datos de la tabla.
- ¿Qué forma tiene la gráfica? ______
- ¿Qué tipo de relación existe entre la altura del cono y el radio de su base?

______



Altura (cm)	Radio (cm)

Fig. 5.12

b) Construyan un cono con medidas que ustedes propongan y repitan la actividad anterior. Con los datos que obtengan completen la tabla y tracen la gráfica respectiva.

- ¿Qué forma tiene la gráfica?

______

- De acuerdo con la forma de la gráfica, indiquen qué tipo de relación hay entre la altura y el radio de la base del cono.

______

- Comparen sus resultados con los de sus compañeros. ¿Obtuvieron relaciones similares? ______
- Escriban una expresión algebraica que relacione las variables anteriores.

______

Cono truncado: es el sólido de revolución que resulta de girar un trapecio rectángulo, teniendo como eje de rotación su lado perpendicular a la base. Es el cuerpo geométrico que resulta de hacer un corte a un cono por un plano paralelo a su base y separar la parte que contiene al vértice.

5. Al hacer un corte paralelo a la base en un cono se obtiene un **cono truncado** y un cono más pequeño (figura 5.13). ¿Qué figuras geométricas se forman con la generatriz, el radio y la altura del cono original y del cono seccionado? ¿Cómo son entre sí esas figuras?

______

a) ¿Cómo se relaciona la base y la altura del cono original con las del cono seccionado? Escriban la expresión algebraica que las relacione. ______

______

Integración

6. En grupo y con ayuda de su profesor escriban una ecuación que relacione el radio de la circunferencia que se obtiene al hacer un corte paralelo a la base de un cono, su altura original, la altura del cono truncado y el radio de la base original.

______

7. En parejas resuelvan los siguientes problemas.

a) Se requiere construir un silo en forma cónica con dos secciones para almacenar dos tipos de granos. Las medidas necesarias se muestran en la figura 5.13 A).

- ¿A qué altura se deberá hacer la división de las secciones? ______
- Describan el procedimiento que usaron para resolver el problema.

______

______

b) En una fábrica de conos para helados se analizan las dimensiones que tendrá una nueva presentación en sus tamaños chico, mediano y grande. Observa las medidas en el diseño en la figura 5.13 B).

- Completen la tabla con las dimensiones de cada cono.

Tamaño del cono	Radio de la base (cm)	Altura (cm)
Grande		
Mediano		
Chico		

En grupo, con la ayuda de su profesor, comparen sus resultados y procedimientos. Valídenlos y corrijan los errores si es el caso.

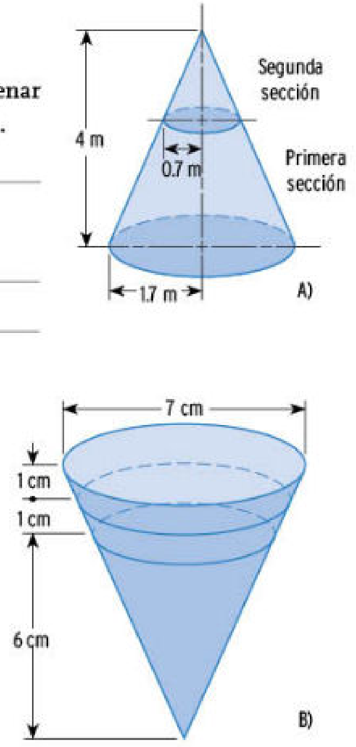


Fig. 5.13

Consolido mis aprendizajes

1. Resuelve los siguientes problemas de manera individual.

a) Resuelve nuevamente el problema inicial.

- Identifica el nombre de la figura plana que se obtiene al desarmar el cono de Apolonio en cada una de sus partes. Revisa si tus respuestas iniciales fueron correctas.
- Calcula las dimensiones del cono seccionado y compáralas con tu respuesta inicial. Compara tus procedimientos y analiza si hay alguna ventaja en seguir uno en particular.

2. El cilindro y el cono de la figura 5.14 tienen la misma altura. El diámetro de la base del cilindro es de 3 m y el del cono de 4 m. ¿A qué distancia del vértice del cono se debe hacer un corte paralelo a su base para que el radio de la circunferencia del corte sea igual al radio de la base del cilindro?

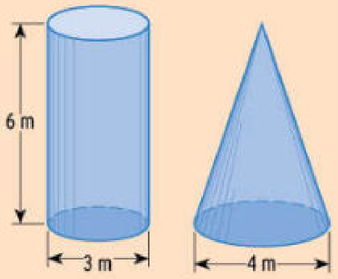


Fig. 5.14

3. Indica dónde debe hacerse un corte al cilindro de la figura 5.15 para obtener una sección rectangular cuya base mida 15 cm.

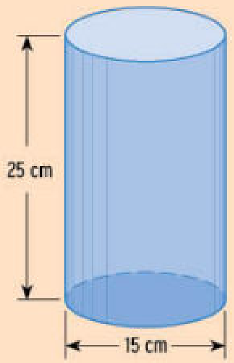


Fig. 5.15

4. Un fabricante de relojes de arena cuenta con dos conos de vidrio huecos, cuyas medidas muestra la figura 5.16. ¿A qué altura de los conos debe hacer el corte para que sus bases superiores tengan la misma medida y así poder ensamblarlos? Se necesita que la zona de ensamble mida 0.5 cm de diámetro.

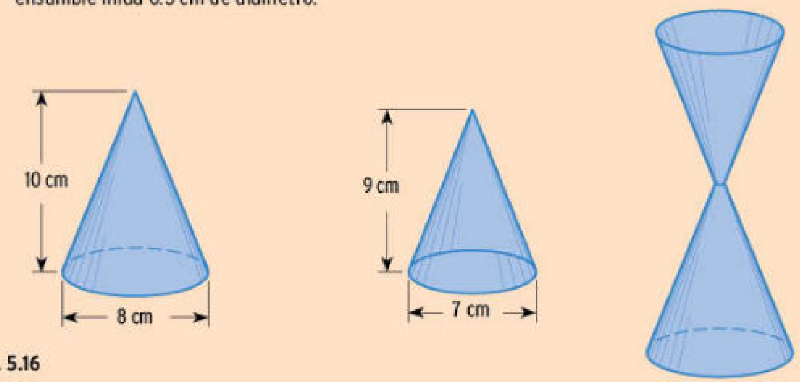


Fig. 5.16

5. Para fabricar embudos, en un taller utilizan conos y tubos de plástico con las medidas que señala la figura 5.17. Indica la altura donde deben hacer un corte a los conos para ensamblarlos con los tubos.

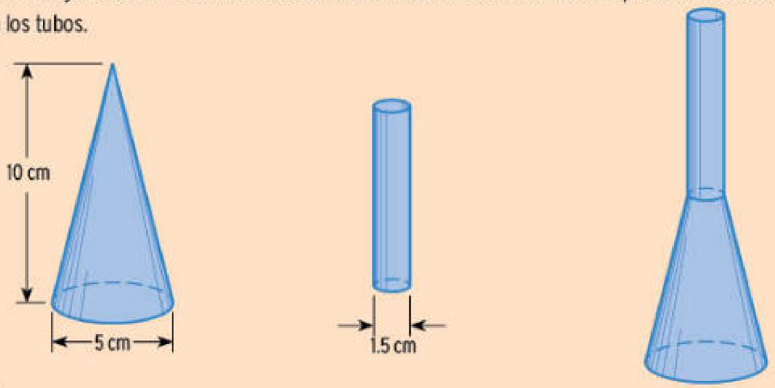


Fig. 5.17

Volumen de cilindros y conos

Inicio a partir de lo que sé

En parejas resuelvan el siguiente problema.

Luis necesita más vasos para servir las bebidas que prepara en su negocio de jugos y licuados. En el almacén donde compra sus utensilios, encuentra tres modelos de vasos de la misma altura, pero diferente base, los cuales se muestran en la figura 5.18. ¿De cuáles le conviene comprar si desea que la capacidad de los vasos sea la menor posible?

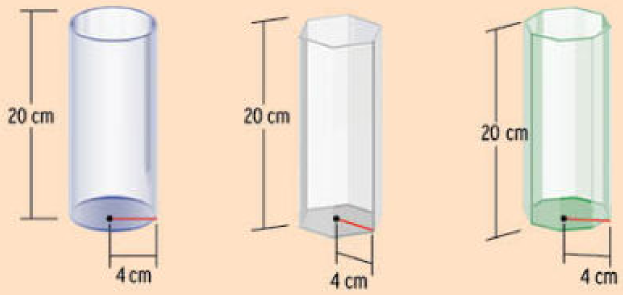


Fig. 5.18

a) Expliquen cómo obtuvieron a su respuesta.

b) Comparen sus respuestas y procedimientos con otras parejas. Si encuentran diferencias, verifiquen sus resultados y corríjanlos si es necesario.

Resuelvo y aprendo

Fórmula para calcular el volumen de un cilindro

1. En grados anteriores aprendieron a calcular el volumen de un prisma. Formen equipos y calculen el de los siguientes prismas. Escriban la fórmula que utilicen en cada caso.

a) Prisma triangular. La base es un triángulo equilátero.

- ¿Qué datos necesitan para calcular el volumen?

____

- ¿Cómo pueden obtenerlos? Describan su procedimiento.

____

____

- Calculen el volumen.

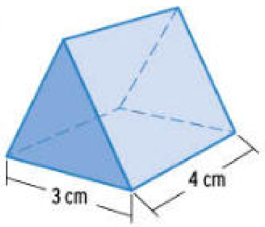


Fig. 5.19

- Fórmula: _______________

b) Prisma cuadrangular.

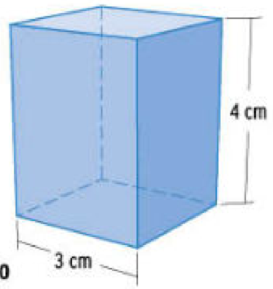


Fig. 5.20

• Fórmula: ______________________

Prisma regular: es un poliedro que tiene dos caras paralelas (bases) con forma de polígono regular, y sus caras laterales son paralelogramos.

c) Prisma pentagonal **regular** (figura 5.21).

• ¿Son suficientes los datos que se muestran para resolver el problema?

____

• Si su respuesta es afirmativa, resuelvan el problema. En caso contrario, indiquen qué datos hacen falta, expliquen cómo obtenerlos y resuelvan el problema.

____

____

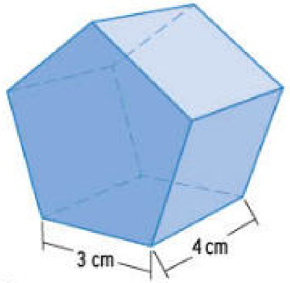


Fig. 5.21

• Fórmula: ______________________

d) Prisma hexagonal regular.

• Escriban un procedimiento para obtener la longitud del lado de la base del prisma a partir de los datos de la imagen y calculen el volumen.

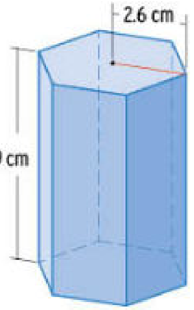


Fig. 5.22

• Fórmula: ______________________

____

e) ¿Qué tienen en común las fórmulas para calcular el volumen de los prismas anteriores?

____

2. En equipos analicen sus resultados anteriores y hagan las siguientes actividades.

a) Observen el cilindro de la figura 5.23.

• ¿Qué tiene en común con los prismas?

____

____

• ¿Cómo podrían calcular el volumen del cilindro? Propongan un procedimiento y descríbanlo a continuación.

____

____

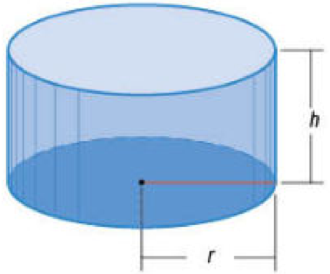


Fig. 5.23

• Calculen el volumen del cilindro. Consideren que su radio es de 2.5 dm y su altura de 5 dm.

b) Validen su procedimiento. Construyan con cartulina un prisma de base regular y un cilindro, ambos sin tapa, de la misma altura; procuren que las áreas de sus bases midan lo mismo. Acuerden con los otros equipos que las bases de sus prismas tengan distintas formas, pero que el área de la base y la altura sean iguales.

• Llenen el prisma con semillas pequeñas, como lentejas, arroz o alpiste.

• Vacíen el contenido del prisma en el cilindro. ¿Cómo es el volumen del prisma en relación con el del cilindro?

____

Fig. 5.24

Reflexionen. ¿Cuánto cambia el volumen de un cilindro si el radio de su base se reduce a la mitad? ______________________

____

En grupo comparen sus resultados y procedimientos, y escriban un procedimiento para calcular el volumen de un prisma si se conocen el radio de su base y su altura.

____

____

Integración

3. En grupo y con ayuda de su profesor escriban una fórmula para calcular el volumen de un cilindro a partir del radio de su base y su altura.

____

Fórmula para calcular el volumen de un cono

4. En su curso de Matemáticas de segundo grado aprendieron a calcular el volumen de pirámides. En equipos obtengan el volumen de los siguientes cuerpos geométricos. Anoten la fórmula que utilicen en cada caso.

a) Tetraedro.

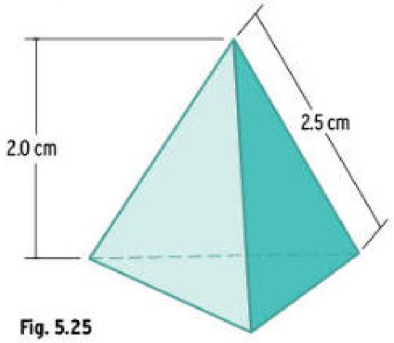


Fig. 5.25

- ¿Qué datos requieren para calcular el volumen del tetraedro?

____

- Realicen las operaciones necesarias para obtener los datos faltantes y aplicar la fórmula que aprendieron en segundo grado. Calculen el volumen del tetraedro.

- Fórmula: ______________________________

b) Pirámide cuadrangular.

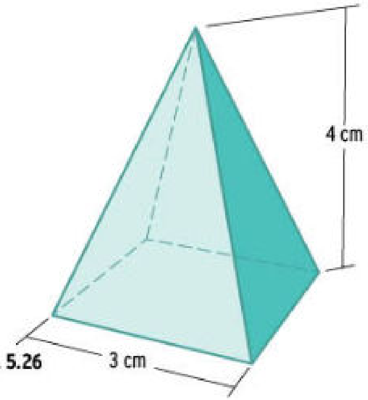


Fig. 5.26

- Fórmula: ______________________________

c) Pirámide pentagonal.

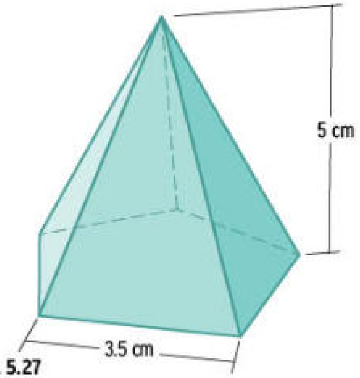


Fig. 5.27

- ¿Requieren algún dato extra para calcular el volumen? Si su respuesta es afirmativa, indiquen cuál es, obténganlo y calculen el volumen. Si es negativa, calculen directamente el volumen.

____

- Fórmula: ______________________________

d) Prisma heptagonal.

- ¿Qué datos necesitan para calcular el volumen?

____

- Realicen las operaciones para obtener los datos faltantes y calculen el volumen.

- Fórmula: ______________________________

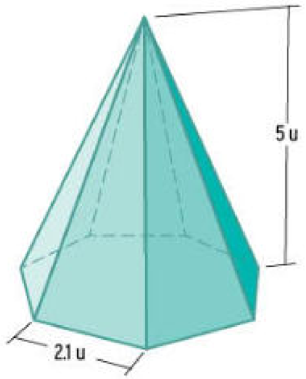


Fig. 5.28

5. En equipos analicen sus resultados y a continuación realicen las actividades.

a) Observen el cono de la figura 5.29.

- ¿Qué tiene en común con las pirámides?

____

____

- Propongan un método para calcular su volumen

____

____

- Calculen el volumen del cono con base en su propuesta. Consideren que su radio es de 2.5 dm y su altura de 7.5 dm.

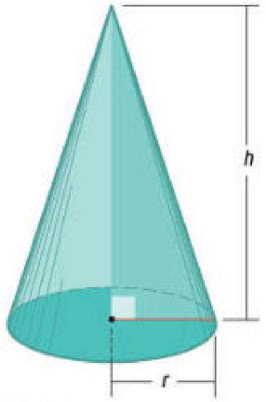


Fig. 5.29

b) Validen su procedimiento. Cada equipo debe construir una pirámide de base regular y un cono, ambos sin las tapas; las bases de los cuerpos deben tener la misma área, y la altura de ambos debe ser igual.

- Llenen su prisma con semillas pequeñas y enseguida vacíenlas en el cono. ¿Cómo es el volumen de la pirámide comparado con el del cono?

____

En grupo comenten sus resultados y procedimientos, y establezcan un método para calcular el volumen de un cono si se conocen el radio de su base y su altura.

Fig. 5.30

Integración

6. En grupo escriban una fórmula para calcular el volumen de un cono a partir del radio de su base y su altura. ____________________

Relación entre el volumen de un cono y el de un cilindro

Te invito a...

visitar la siguiente dirección electrónica: www.edutics.mx/4BZ donde analizarás las dimensiones de prismas, pirámides, conos y cilindros en relación con sus volúmenes. (Consulta: 21 de enero de 2019).

7. En equipos realicen las siguientes actividades.
   a) Calculen el volumen de los siguientes cuerpos.

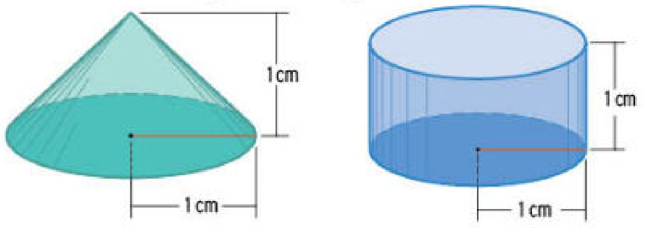


Fig. 5.31

- ¿Qué relación observan entre sus volúmenes?

____

- ¿Su respuesta es consistente con el volumen de pirámides y prismas de la misma base e igual altura? ____________________

Fig. 5.32

b) Elaboren un cilindro y un cono de cartulina de la misma altura e igual área de sus bases, ambos sin tapas. Llenen el cono con semillas y vacíenlas en el cilindro las veces que sean necesarias hasta llenarlo.

- ¿Cuántas veces tuvieron que llenar el cono? ____________________
- Expliquen el resultado con base en sus respuestas.

____

Consolido mis aprendizajes

1. De forma individual resuelve los siguientes problemas
   a) Resuelve numéricamente el problema de la sección Inicio a partir de lo que sé y valida tu respuesta inicial.
2. Un florero cilíndrico tiene un diámetro interior de 14 cm y su altura es de 25 cm. Si se desea llenar con agua hasta $\frac{2}{3}$ de su capacidad, ¿cuántos mililitros del líquido se necesitan?
3. Los catetos de un triángulo rectángulo miden 7 cm y 10 cm. Calcula el volumen de cada cono de revolución que se genera al rotar el triángulo en torno a uno y otro cateto.

Situaciones con conos y cilindros

Inicio a partir de lo que sé

En parejas analicen la siguiente situación y respondan.

Silvia quiere guardar, luego de pulverizarlas, tres piezas de piloncillo en un recipiente cilíndrico cuya altura y diámetro son iguales a la altura y diámetro de la base de cada pieza (figura 5.33). Como sólo dispone de ese recipiente, antes de pulverizarlo, Silvia quiere saber si cabrá todo el piloncillo.

Fig. 5.33

a) ¿Cabrá todo el volumen de piloncillo en el recipiente? ¿Sobrará o faltará espacio? Argumenten su respuesta (usen sólo cálculo mental).

____

____

Resuelvo y aprendo

Estimación del volumen de conos y cilindros

1. En equipos analicen y resuelvan mentalmente, por aproximación, la siguiente situación.
   a) En el exterior de una mina, una máquina trituradora descarga 100 m³ de piedra pulverizada (figura 5.34). Si el montículo que se forma tiene forma cónica y alcanza una altura de 6 m, ¿cuál es aproximadamente el radio de su base?

   ____

Fig. 5.34

   b) Si en vez de amontonarla, la piedra se depositara en un contenedor cilíndrico cuyo radio fuera igual al radio de la base del montículo anterior, ¿cuál sería la altura del contenedor para que en él se depositara todo el volumen de piedra pulverizada?

   ____

Comparen sus respuestas y razonamientos con los de otros equipos; discutan las diferencias y al final usen una calculadora y sus conocimientos de geometría para validarlas. ¿Qué supusieron para aproximar sus respuestas? Discutan si sus propuestas son aceptables.

Fig. 5.35

2. En parejas resuelvan los siguientes problemas.

a) En un contenedor industrial, como el de la figura 5.35, la altura de la zona cónica es una cuarta parte de la altura de la parte cilíndrica. Si sabemos que la sección cónica tiene una capacidad de 19 m^3, ¿cuál es la capacidad del contenedor? Argumenten su respuesta.

- Si además se sabe que la altura de la región cónica es de 2 m, ¿cuál es aproximadamente el diámetro del contenedor? Expliquen.
- Si el contenedor se llenara con agua, ¿cuántos litros contendría?
- ¿A qué altura llegaría el nivel del líquido si el contenedor se llenara sólo a la mitad? Expliquen su razonamiento.

b) Francisco prepara paletas de chocolate con forma de conos para el cumpleaños de su hermana. Tiene una olla cilíndrica de 13 cm de altura y 7 cm de radio llena de chocolate líquido que vaciará en moldes cónicos con bases de 4 cm de diámetro y una altura de 6 cm.

Fig. 5.36

- ¿Cuál es la capacidad de la olla?
- ¿Cuántas paletas puede hacer Francisco con esa cantidad de chocolate?
- Si quisiera hacer 50 paletas más, ¿qué altura adicional debería tener una olla del mismo diámetro que la anterior?

- Si las paletas fueran cilíndricas con 4 cm de diámetro y 4 cm de altura, ¿cuántas podría hacer con el contenido de la olla original?

Cálculo del volumen de conos y cilindros

3. En parejas analicen y resuelvan las siguientes situaciones.

a) Una famosa revista turística describe al Monte Mayón, ubicado en las islas Filipinas, como un volcán de perfecta forma cónica, algo digno de verse. Informa además que su altura es de 2525 m sobre el nivel del mar y una circunferencia cercana a los 130 km.

- ¿Cuánto mide el diámetro de la base del volcán?

Fig. 5.37 Monte Mayón, Legazpi, Filipinas.

- ¿Cuál es el volumen aproximado del Monte Mayón?

Comenten y discutan con otros equipos los procedimientos que usaron para obtener las respuestas, qué suposiciones hicieron y por qué les parecieron razonables.

b) Una fábrica de juguetes didácticos de madera tiene entre sus productos una mesa de cilindros con bases iguales y alturas diversas. Completen la siguiente tabla, que muestra cómo el volumen de los cilindros varía al cambiar su altura.

Altura (cm)	4	5	6	7	8	9	
Volumen (cm^3)	50.24	62.8					125.6

Fig. 5.38

- ¿Cuál es el área de la base de los cilindros?

- ¿Cuál es el diámetro de la base de los cilindros?

- ¿Consideran que la relación entre la altura y el volumen de los cilindros es proporcional? Si su repuesta es afirmativa, calculen la constante de proporcionalidad e indiquen a qué dimensión de los cilindros corresponde. Si la respuesta es negativa, determinen la ecuación que relaciona ambas magnitudes.

c) El juego anterior también incluye conos de madera que tienen las mismas dimensiones (radios de la base y alturas) que los cilindros. Completen la tabla y analicen la forma en que el volumen de los conos varía al cambiar su altura.

Altura (cm)	4	5	6	7	8	9	10
Volumen (cm^3)							

- ¿El volumen de los conos varía de manera directamente proporcional a su altura? Si su repuesta es afirmativa, calculen la constante de proporcionalidad e indiquen a qué dimensión de los conos corresponde, pero si es negativa, determinen la ecuación que relaciona ambas magnitudes.

- ¿Cuál es la relación entre la forma en que el volumen varía con la altura en un cilindro y la manera en que varía en un cono? Expliquen el porqué de esa relación.

d) Otro juego didáctico es un conjunto de cilindros y conos, todos de la misma altura, pero distintos radios. Completen las tablas que aparecen a continuación y respondan.

Variación del volumen en un cilindro							
Radio (cm)	2	3	4	5	6	7	8
Volumen (cm^3)			603.19				

- ¿Entre el volumen y el radio de los cilindros hay una relación directamente proporcional? Si su repuesta es afirmativa, calculen la constante de proporcionalidad; en caso contrario indiquen el tipo de relación entre las variables. Justifiquen su respuesta.

Variación del volumen en un cono							
Radio (cm)	2	3	4	5	6	7	8
Volumen (cm^3)							

- ¿Entre el volumen y el radio del cono hay una relación directamente proporcional? Argumenten su respuesta.

- Si la repuesta anterior es afirmativa, determinen la constante de proporcionalidad, pero si no es así, determinen el tipo de relación entre las variables y encuentren una ecuación que las relacione.

En grupo compartan sus respuestas y valídenlas con apoyo de su profesor.

4. En parejas resuelvan los siguientes problemas.

a) Un alfarero elaborará conos de barro decorados. ¿Qué diámetro debe tener la base de uno si para moldearlo utiliza 2 262 cm^3 de barro y requiere que tenga 20 cm de altura?

b) Un fabricante de envases para pinturas necesita elaborar una lata cilíndrica con capacidad de un litro. Si la lata debe tener 12 cm de altura, ¿cuál será el radio de su base?

c) ¿Cuánto debe medir la altura de un cono de papel para agua si su base mide 3 cm de radio y tiene una capacidad de 56 mL?

Integración

5. En grupo y con la ayuda de su profesor completen los siguientes párrafos.

a) La expresión algebraica para calcular el volumen de un cilindro de radio r y altura h es ________. ¿Con qué ecuación podrían obtener el radio dados su volumen y altura? ________

b) Escriban una expresión para calcular la altura. ________

c) Anoten las ecuaciones correspondientes para calcular la altura y el radio de un cono.

$h =$ ________ y $r =$ ________

Consolido mis aprendizajes

1. En equipos analicen y resuelvan lo siguiente.

a) Retomen el problema de la sección Inicio a partir de lo que sé. Como muestra la figura 5.33, cada pieza de piloncillo es un cono truncado; si fueran conos completos, su altura sería de 16 cm. Usen sus conocimientos de geometría y una calculadora para responder.

- ¿Cuál sería el volumen de una de esas hipotéticas piezas completas de piloncillo?
- ¿Cuál es el volumen de una pieza de piloncillo truncada?
- Entonces, ¿todo el volumen de piloncillo cabe en el recipiente? Si sobra espacio en el recipiente, ¿cuánto es? Si falta espacio, ¿cuánto es? Expliquen sus respuestas.
- ¿Cuántas piezas de piloncillo se tendrían que pulverizar para llenar por completo un recipiente de 1 litro de capacidad?

Compartan y discutan con otros equipos su estrategia para responder la segunda pregunta de esta sección. En grupo con la ayuda de su profesor, expliquen, a partir de las medidas iniciales de las piezas de piloncillos, por qué la altura de los conos completos es de 16 cm.

2. Consideren de nuevo el primer problema de la sección Resuelvo y aprendo. Supongan que el contenedor para la piedra pulverizada tiene un diámetro de 4 m.

a) ¿Cuál debería ser su altura aproximada para contener todo el volumen de piedra pulverizada?

3. ¿Es lo mismo el volumen que la capacidad de un recipiente? Expliquen.

4. Se tiene un cono de radio *r* y altura *h*. ¿Qué acción aumenta más su volumen, duplicar su altura o su radio? Argumenten su respuesta.

5. De manera individual plantea una situación en la que se requiera encontrar el radio de un cilindro y diseña otra en la que se requiera encontrar la altura de un cono. Incluye los datos que hagan falta. Escríbelas en tu cuaderno, pide a un compañero que las resuelva y halla las soluciones de las que él haya planteado. Al finalizar, verifiquen juntos que sus respuestas sean correctas.

Variaciones lineales y cuadráticas

Inicio a partir de lo que sé

En parejas resuelvan lo que se indica.

La siguiente gráfica muestra la distancia que recorren dos automóviles en función del tiempo.

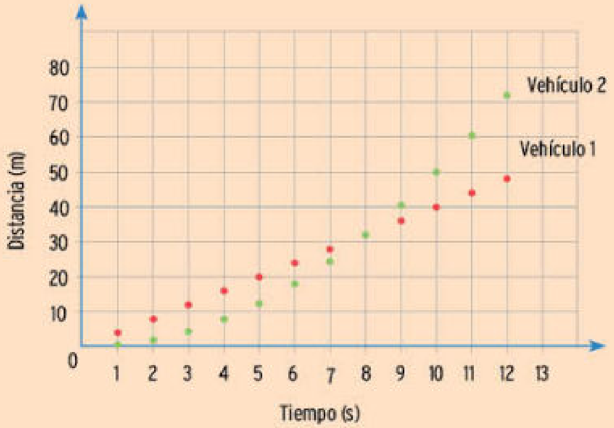


Fig. 5.39

a) De acuerdo con su forma, ¿qué tipo de gráfica le corresponde a cada vehículo?

b) ¿Qué vehículo recorrió más distancia en los primeros 6 segundos?

c) ¿Cuál vehículo había recorrido una mayor distancia en el segundo 10?

d) ¿Cómo es la rapidez del vehículo 1 y qué relación tiene con su gráfica?

e) ¿Cómo es la rapidez del vehículo 2 y cómo se relaciona con su gráfica?

f) ¿En qué momentos del recorrido ambos vehículos se encontraban a la misma distancia del origen? ¿A qué distancia, aproximadamente, se encontraban uno del otro a los 12 segundos?

g) ¿Cómo cambia la distancia que recorre cada vehículo en función del tiempo y cómo este hecho se relaciona con la forma de la gráfica?

Resuelvo y aprendo

Lineales o cuadráticas

1. En parejas resuelvan las siguientes situaciones.

a) Un automóvil que viaja por una carretera recta que conecta dos ciudades recorre 144 km con 12 L de gasolina.

- Si el consumo de gasolina es proporcional a la distancia recorrida, ¿cuántos litros consumirá en el doble de distancia?
- ¿Cuántos kilómetros recorre por litro de gasolina?
- Escriban la expresión algebraica que relaciona la distancia recorrida en kilómetros en función del consumo de gasolina.
- Si la distancia entre las dos ciudades es de 324 km, ¿cuánta gasolina requiere el automóvil para el recorrido?
- ¿Qué distancia recorrerá el automóvil con 1.5 L de gasolina? ______
- ¿Qué forma tendrá la gráfica que representa la relación entre la distancia que recorre el automóvil y la cantidad de gasolina que consume? Expliquen su respuesta.

b) El dueño de una avioneta cobra $420.00 por el servicio de transporte de mercancía más $130.00 por cada kilogramo de masa de la carga a transportar.

- Determinen la expresión algebraica que relaciona el costo de transporte de mercancías y la masa de la carga.
- ¿Cuál es el costo por 100 kg de carga?

- ¿Si el costo por transportar cierto tipo de mercancía fue de $22 520.00, ¿cuántos kilogramos de mercancía se transportaron?
- ¿La relación entre la masa de la mercancía y el costo de trasportación es proporcional? ¿Por qué?

c) Por accidente, un ladrillo cae en una construcción. En el primer segundo recorre 4.9 m, para el siguiente segundo alcanza una distancia de 19.6 m y en el tercero su recorrido fue de 44.1 m.

- ¿La relación entre la distancia recorrida y el tiempo transcurrido es lineal? Expliquen su respuesta.
- Completen la siguiente tabla.

Distancia recorrida (m)	4.9		44.1
Cuadrado del tiempo (s^2)	1	4	
$\frac{\text{Distancia}}{\text{Cuadrado del tiempo}}$			

- ¿Cómo es la relación entre los valores de distancia y el cuadrado del tiempo?
- Escriban una expresión algebraica que relacione la distancia recorrida en función del tiempo.
- ¿Cuánto tiempo tardó el ladrillo en recorrer 30 m?
- ¿Qué distancia recorrió en cuatro segundos?

Integración

2. En grupo, con ayuda de su profesor, escriban cómo pueden distinguir cuándo una situación corresponde a una relación lineal y cuándo a una relación cuadrática.

Representación gráfica de relaciones lineales y cuadráticas

3. En equipos resuelvan lo siguiente.

a) El mercurio contenido en el tubo capilar de un termómetro tiene una altura de 3 cm cuando la temperatura es de 0 °C. Por cada 10 °C que aumenta la temperatura, la altura del mercurio se incrementa 2 cm.

- Elaboren la gráfica que represente la relación entre la altura de la columna de mercurio con la temperatura.

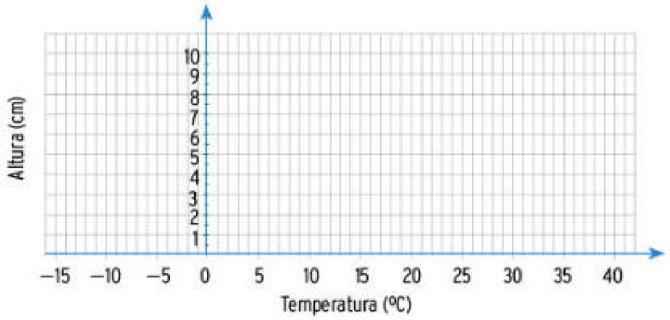


Fig. 5.40

- ¿Qué forma tiene la gráfica? Expliquen por qué tiene esa forma.

____

- ¿Qué altura tendría la columna de mercurio si la temperatura fuera de –5 °C?

____

- Si la columna alcanzara una altura de 7 cm, ¿cuál sería la temperatura? _______
- ¿Cuál es la mínima temperatura que puede marcar el termómetro? Explica tu respuesta.

____

- Escriban la expresión algebraica que corresponde a la gráfica.

____

b) Los economistas saben que el precio de un producto influye directamente en su venta y, por consiguiente, en las ganancias que se obtienen de él. Un producto barato tiene mayor demanda que uno caro, pero las ganancias por unidad son menores que si se vende a mayor precio, aunque a mayor precio, la demanda disminuye. En una cafetería se analiza el precio al que se oferta el café con el fin de determinar el precio con el que se obtiene la mayor ganancia. La relación entre estas variables se muestra en la siguiente tabla.

Precio (pesos)	5	10	15	20	25	30	35	40	45
Ganancias (pesos)	330	680	930	1 080	1 130	1 080	930	680	330

- ¿Qué gráfica representa la relación entre los datos, una recta o una parábola? Expliquen su respuesta.

____

- Grafiquen los datos en el plano cartesiano.
- ¿Obtuvieron la gráfica esperada?

____

- ¿En qué intervalo de precios la ganancia aumenta?

____

- ¿Qué pasa con las ganancias cuando el precio es mayor a $25.00?

____

- ¿Cuál es la mayor ganancia posible? _______
- ¿A qué precio corresponde esa ganancia? _______
- Señalen la ecuación que corresponde a la gráfica.

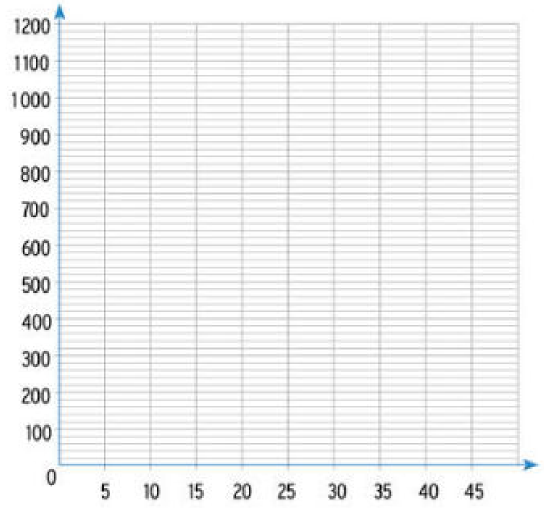


Fig. 5.41

- $y = 5x + 330$ • $y = 2x^2 - 100x + 120$ • $y = x^2 + 305$ • $y = -2x^2 + 100x - 120$

- ¿Qué método usaron para encontrarla?

____

c) Dibujen la gráfica de la ecuación $y = 0.2x^2 - 5$.

- ¿Qué forma tiene?

____

- Recuerden que toda ecuación cuadrática puede escribirse de la forma $y = ax^2 + bx + c$. Anoten los valores de la ecuación que corresponden a esos coeficientes.

$a =$ _______ $b =$ _______ $c =$ _______

- Analicen la gráfica. ¿En qué punto interseca al eje y?

____

- ¿Qué relación observan entre la ordenada en la que la gráfica corta al eje vertical y los valores de los coeficientes de la ecuación en su forma general?

____

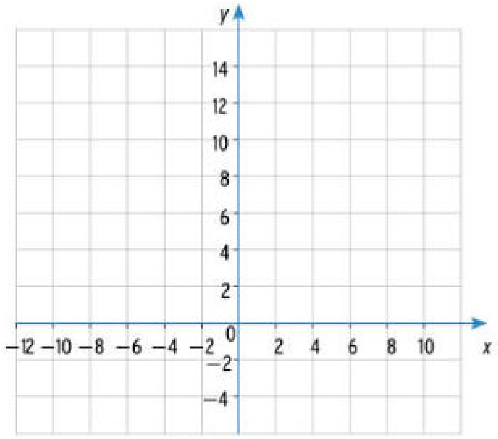


Fig. 5.42

4. En parejas trabajen las siguientes actividades.

a) Escriban en la tabla el número que relaciona cada parábola con su ecuación.

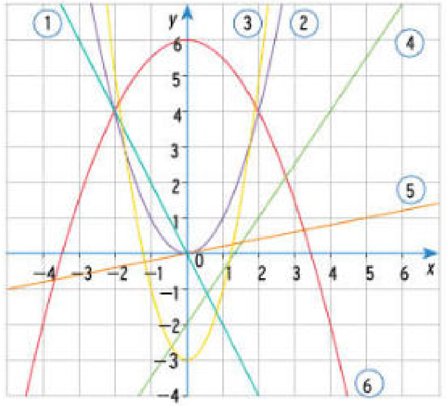


Fig. 5.43

Ecuación	Gráfica
$y = 2x^2 - 3$	
$y = \frac{1}{5}x$	
$y = -2x$	
$y = x^2$	
$y = -0.5x^2 + 6$	
$y = \frac{3}{2}x - 2$	

- ¿Qué forma adquiere la gráfica cuando el coeficiente a de la ecuación general $y = ax^2 + bx + c$ es negativo? ______
- ¿Qué recta tiene mayor inclinación? ¿Cuál es su pendiente?

______

Integración

5. En grupo resuelvan lo siguiente.

a) Escriban las diferencias entre las gráficas de una relación lineal y las de una relación cuadrática. ______

______

Consolido mis aprendizajes

1. Resuelvan lo siguiente en forma individual.

a) Retoma la actividad inicial y estima la distancia a la que se encuentran los vehículos en los minutos 4, 8 y 12.

b) Una pelota se lanza verticalmente hacia arriba. La altura que alcanza está determinada por la ecuación $h = 20t - 10t^2$, donde h es la altura medida en metros y t, el tiempo en segundos.

- Dibuja en tu cuaderno la gráfica correspondiente.
- ¿Cuánto tiempo transcurre desde que la pelota se lanza hasta que regresa al punto de partida?

______

- ¿En qué tiempo alcanzó la mayor altura y de cuánto fue?

______

2. Considera las gráficas que se encuentran al final de la página y relaciónalas con las siguientes situaciones escribiendo en el recuadro el inciso de la situación que representa.

a) El valor de una bicicleta disminuye \$120.00 cada año que pasa, por lo que después de 4 años tiene un precio de \$450.00.

b) El área que ocupa la imagen en una pantalla de cine depende de la distancia a la que se coloca el proyector. En la siguiente tabla se muestra la relación entre algunos de esos datos.

Distancia (m)	1	2	3	4	5	10	12	15	20
Área de la imagen (m^2)	0.04	0.16	0.36	0.64	1	4	5.76	9	16

c) Un fabricante de zapatos sabe que sus ingresos mensuales están dados por la función $y = 500x - 2x^2$, donde y corresponde a los ingresos y x representa la cantidad de pares de zapatos fabricados en el mes.

d) En un estudio sobre la capacidad de aprendizaje de alumnos de secundaria se encontró que la proporción de elementos recordados de un conjunto se relaciona con el tiempo efectivo de estudio. En 5 s la proporción de elementos recordados fue de 0.32, en 10 s se recordaba una proporción de 0.64 de los elementos y en 15 s la proporción era de 0.96.

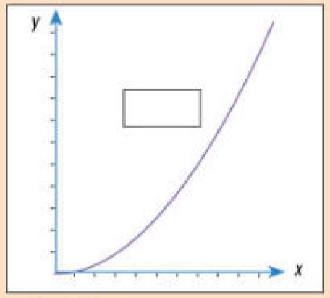


Fig. 5.44

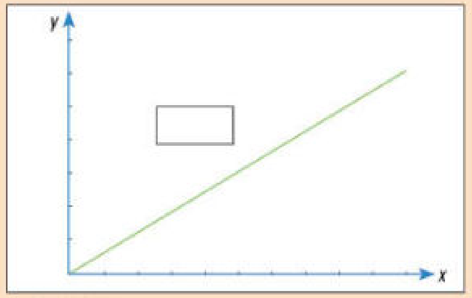


Fig. 5.45

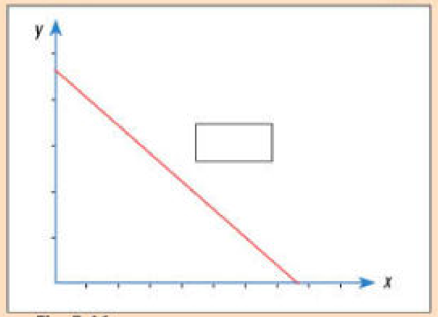


Fig. 5.46

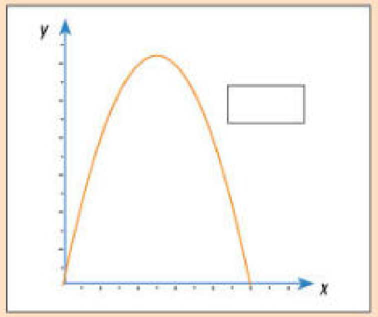


Fig. 5.47

Antes de apostar...

Inicio a partir de lo que sé

En parejas realicen la siguiente actividad y respondan.

Juego de fracciones

Necesitarán una baraja española o inglesa.

- Dibujen en su cuaderno dos rectángulos del tamaño de una carta de la baraja, uno arriba del otro separados por una línea horizontal, como muestra la figura 5.48.
- Cada jugador elegirá una figura de la baraja (palo) y tomará de ésta las cartas con los números 2, 3, 4, 5, 6 y 7.
- Elegirá también una casilla: numerador o denominador, y un bando: reducibles o irreducibles.

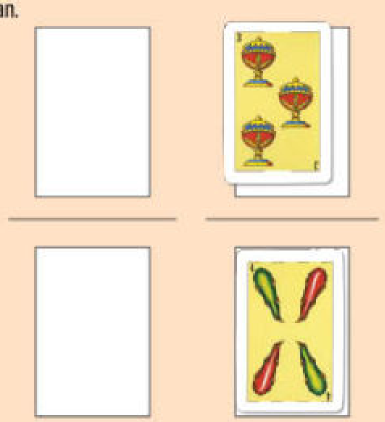


Fig. 5.48

- Barajeen sus cartas y colóquenlas bocabajo. Cada uno tome una carta al azar y, volteándola, colóquela en el rectángulo superior si eligió numerador o en el inferior si eligió denominador, de manera que formen una fracción de cartas.
- Según si la fracción es **reducible** o **irreducible**, gana un punto quien haya elegido ese bando.
- El juego se repite las veces necesarias; gana el primero que acumule 5 puntos.
- Realicen el juego en tres ocasiones y respondan.

a) ¿Alguno de los dos jugadores ganó más veces? ¿Quién?

b) Comparen su respuesta con la de otras parejas. ¿Creen que los dos jugadores de cada pareja tienen la misma probabilidad de ganar o alguien tiene ventaja?

c) ¿Consideran que el juego es justo? ¿Por qué?

Comenten con sus compañeros y con su profesor sus respuestas y sus argumentos. ¿Son correctos? ¿Por qué?

Fracción reducible: es una fracción que se puede simplificar, es decir, que se puede transformar en otra fracción equivalente con números enteros menores.

Fracción irreducible: es una fracción que no es posible simplificar.

Resuelvo y aprendo

Equiprobabilidad

1. En parejas consideren, analicen y resuelvan las siguientes situaciones.

Piedra, papel o tijeras

a) Elaboren con cartulina 12 tarjetas como las que ilustra la figura 5.49; cuatro con el dibujo de papel, cuatro con el de piedra y cuatro con el de tijeras, cuidando que sus reversos sean indistinguibles.

- Cada jugador debe tener dos tarjetas de cada tipo.
- Mézclenlas y cada uno saque una al azar mostrándola a su compañero.
- Determinen al ganador de acuerdo con el siguiente criterio: tijeras gana a papel, papel gana a piedra, piedra gana a tijeras. El ganador se anota un punto.
- Tomen sus tarjetas y revuélvanlas para la siguiente partida.
- Gana quien primero acumule 5 puntos.

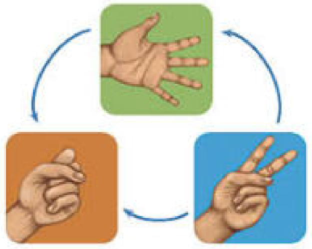


Fig. 5.49

- ¿En este juego se puede empatar? ¿Cómo?
- Determinen la probabilidad de que gane cada jugador y la probabilidad de empatar en cada juego.
- ¿Consideran que este es un juego justo? ¿Por qué?

Juegos de volados

a) Fili y Kili juegan volados: si sale sol, gana Fili, y si sale águila, gana Kili.

- Después de 10 lanzamientos Kili ha ganado siete veces y Fili, 3. ¿Consideran que el juego es justo? ¿Por qué?
- ¿Qué probabilidad tiene Kili de ganar? ¿Cuál es la probabilidad de que gane Fili? Expliquen.
- De acuerdo con su respuesta anterior, ¿ratifican o cambian su respuesta a la pregunta sobre si el juego es o no justo? Argumenten su respuesta.

Fili propone modificar las reglas del juego: lanzar dos monedas al mismo tiempo. Si las caras de ambas son iguales, él gana; si son distintas, gana Kili.

- ¿El juego es justo con estas condiciones? ¿Qué probabilidad de ganar tiene cada jugador? ______________________

Kili, por su parte, sugiere usar tres monedas y que gane Fili si las tres muestran la misma cara, de lo contrario ella gana.

- ¿Este juego es o no justo? Argumenten su respuesta. ______________________

____

Fili propone la siguiente regla: gana Kili si, al lanzar las tres monedas, al menos salen dos caras con águila, y él gana si al menos salen dos soles.

b) ¿El juego sería equitativo? ¿Por qué? ______________________

____

La regla que después propone Kili es que gane quien obtenga dos caras iguales, y si las tres monedas son iguales, se considera empate.

- ¿El juego sería equitativo con esta propuesta? Justifiquen su respuesta.

____

Compartan sus argumentos y respuestas con sus compañeros. Expliquen el método que usaron para resolver cada situación. Valídenlas de acuerdo con la corrección de cada procedimiento.

Juego de los náufragos

a) En el siguiente juego pueden participar de dos a cuatro jugadores (o más, si se adapta el tablero que se muestra enseguida).
   - Los jugadores eligen un "carril", A, B, C o D. Sobre él, en la columna marcada con el "0", colocan una ficha a manera de avatar para señalar a su "náufrago". Cada jugador lanza un dado de seis caras numeradas del 1 al 6 y una moneda o ficha cuyas caras estén rotuladas con los signos "+" y "–".
   - En cada turno, cada jugador avanza el número de cuadros que señale el dado en el sentido que determine el signo de la moneda. Si el signo es positivo, el movimiento será hacia la derecha; si es negativo, hacia la izquierda.
   - Gana el jugador cuyo náufrago alcance primero cualquiera de las dos orillas.

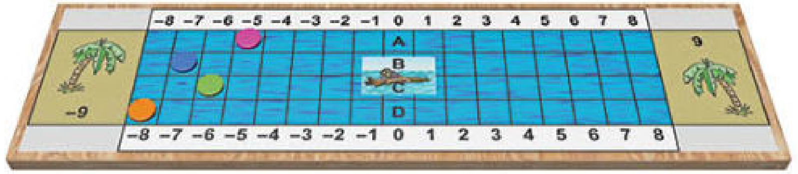


Fig. 5.50

b) Jueguen algunas partidas y después respondan.
   - ¿Algún jugador tiene ventaja en este juego? ______________________
   - ¿Los jugadores tienen iguales probabilidades de ganar? ¿Por qué?

   ____

c) ¿Entonces dirían que el juego es justo? ¿Por qué? ______________________

2. En parejas resuelvan la siguiente situación.

Juego de la balanza

a) La maestra de Matemáticas de Dori y Nori propuso el siguiente juego: en una balanza de brazos iguales, Dori debe colocar, en un brazo, un cubo elegido al azar de entre un conjunto de seis cubos iguales en apariencia, pero con distinta masa: tres cubos son de 95 gramos y los otros tres, de 105 gramos.

   Luego Nori debe escoger otro cubo al azar y colocarlo en el otro brazo de la balanza. Dori suma un punto si la balanza se equilibra perfectamente; en caso contrario, el punto será para Nori. Ganará quien acumule primero cinco puntos.

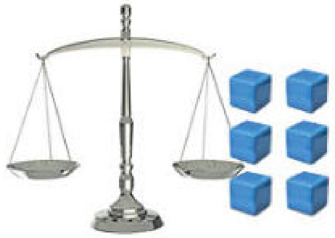


Fig. 5.51

   - Según Nori, como la balanza tiene brazos iguales y hay la misma cantidad de cubos de un peso que del otro, el juego es justo y legal. ¿Están de acuerdo? Expliquen y compartan su opinión.
   - ¿Cómo podrían comprobar si Nori tiene o no razón? ______________________
   - Si Dori coloca un cubo en la balanza, ¿cuál es la probabilidad de que gane cuando Nori coloque el suyo? ______________________
   - ¿Cuál es la probabilidad de que Nori gane el punto? ______________________
   - ¿Entonces hay un jugador que lleve ventaja en este juego? Si su respuesta es afirmativa, indiquen quién es y por qué; si es negativa, propongan cambios en las reglas para que el juego sea justo.

   ____

Integración

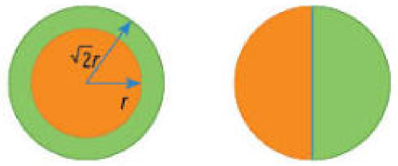
3. En grupo y con la ayuda de su profesor completen los enunciados.

a) Si todos los resultados posibles en un juego de azar tienen __________ probabilidades de ocurrir, decimos que los resultados son *equiprobables* y que es un juego __________.

b) Si los resultados posibles en un juego de azar tienen __________ probabilidades de ocurrir, decimos que los resultados no son equiprobables y que el juego es __________.

4. En parejas resuelvan los siguientes problemas.

Tiro al blanco



Blanco 1 Blanco 2

Fig. 5.52

a) Checo y Manolo juegan tiro al blanco "azaroso", es decir, lanzan un dardo a blancos como los que se representan en la figura 5.52, de manera que el dardo (de punta finísima) puede caer con igual probabilidad en cualquier punto del área que cubre el blanco. Checo gana cuando el dardo cae en la zona naranja y, Manolo, si cae en la verde. Primero juegan con el blanco 1 y luego con el blanco 2. Observen la figura, analicen la situación y respondan.

- ¿Les parece que en uno de los blancos algún jugador tiene ventaja? ¿Quién y en cuál blanco?

____

____

- ¿El juego es equitativo en el blanco 1? ¿Y en el blanco 2?

____

____

- ¿Entonces el juego es o no justo?

____

Juego de las tuberías

A B A A

Fig. 5.53

a) Leonardo y Rafael se entretienen con un juego de azar que consiste en dejar caer una pelota en la boca de un laberinto que se ramifica, como ilustra la figura 5.53. La pelota tiene la misma probabilidad de tomar cualquier camino cuando se encuentra ante una ramificación. Leonardo gana si la pelota sale por un carril marcado con la letra A y Rafael, si sale por el carril con la letra B.

- ¿Consideran que se trata de un juego justo? ¿Por qué?

____

____

- ¿Cuál es la probabilidad de que gane cada jugador? ______________

En grupo compartan y discutan su método para calcular estas probabilidades. Valídenlo con ayuda de su maestro.

- Con base en su respuesta anterior, expliquen si el juego es o no justo.

____

____

Consolido mis aprendizajes

1. De manera individual considera, analiza y resuelve las siguientes cuestiones.

a) Retoma el juego inicial, calcula las probabilidades de obtener una fracción reducible e irreducible y, con base en tus respuestas, señala si el juego es o no justo.

b) A continuación se proponen modificaciones a este juego. Analízalas y determina si con las nuevas reglas el juego es o no justo. Justifica tus respuestas.

- Cada jugador escoge un bando: par o impar. Cada uno elige una carta y suman sus números. Si el resultado es par, gana un punto el que escogió ese bando; si es impar, gana el otro jugador.

____

- Luego de descubrir las cartas, al número mayor se le resta el menor. Un jugador gana si la resta es un número menor que 2 y el otro gana si la resta es igual o mayor que 2.

____

- Si alguno de los juegos anteriores (o ambos) no son justos, ¿qué modificaciones harías a las reglas para hacerlo justo?

____

____

2. Se ha dicho que el juego de piedra, papel o tijeras aquí presentado es azaroso. ¿No lo es la versión tradicional que se juega con las manos? ¿Ese juego es justo? Argumenta tu respuesta.

____

3. Propón una o más modificaciones a las reglas del juego de los náufragos, de manera que no sea justo.

____

4. Si en el juego de la balanza no se modifican las reglas, pero sólo se usan cuatro cubos, dos de 95 gramos y 2 de 105 gramos, ¿el juego sería justo?

____

5. Si en el juego del tiro al blanco, el blanco 2 se rotara 90° en dirección contraria a las manecillas del reloj, ¿cambiarían las condiciones de probabilidad de sus resultados? Explica.

____

6. Dibuja en tu cuaderno un blanco de tiro en el que se favorezca a Checo y otro que favorezca a Manolo.

7. Dibuja en tu cuaderno un laberinto que favorezca a Rafael.

Te invito a...

En la sección Habilidades digitales de la página 250 se muestra un método para simular un experimento aleatorio y determinar las probabilidades de cada evento. Te invitamos a realizarlo. ¿Podrías usar esa aplicación para otros experimentos aleatorios?

Habilidades digitales

¿Apuestas?

Te invito a...

consultar la página www.edutics.mx/42x donde podrás obtener un *software* gratuito que incluye hojas de cálculo. (Consulta: 21 de enero de 2019).

Ahora trabajarás con una hoja de cálculo. Con esta actividad lograrás una mejor compresión de algunos conceptos de probabilidad que revisaste en este y otros bloques. ¿Listo? ¡Comenzamos!

1. Imagina que a tu comunidad llega la feria que cada año fomenta el intercambio social, cultural y comercial de la región. En un local, por 50 pesos se puede jugar "Par de dados a seis", juego que consiste en lanzar dos dados. Ganas si la suma de los puntos de las caras superiores es menor o igual que 6 y pierdes si la suma es mayor que 6. Si tienes 50 pesos para jugar y deseas aumentar tu capital, ¿apostarías? ¿Cómo resolverías esta situación? Por fortuna cuentas con la herramienta perfecta: ¡tus conocimientos de probabilidad!

2. Para averiguar la probabilidad de salir bien librado, simula el lanzamiento de los dados. Abre una hoja de cálculo y en las celdas A1 y B1 escribe: *Dado 1* y *Dado 2* (figura 1).

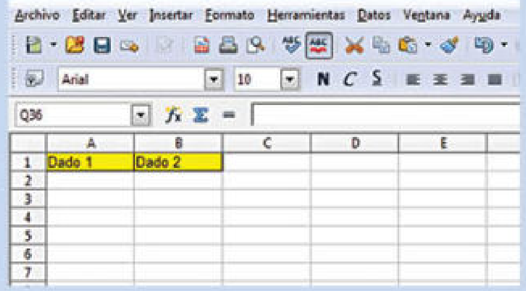


Fig. 1

3. Para simular el lanzamiento de los dados emplea las funciones *INT()* y *ALEATORIO()*; la primera recibe como argumento un número con punto decimal y lo redondea hasta el número entero inferior más próximo; la segunda devuelve un número aleatorio entre 0 y 1. Utiliza estas funciones como se describe a continuación.

   En las celdas A2 y B2 inserta la fórmula $=1+INT(ALEATORIO()*6)$ y oprime la tecla *Entrar* (figura 2); en cada celda obtendrás un número aleatorio entre 1 y 6.

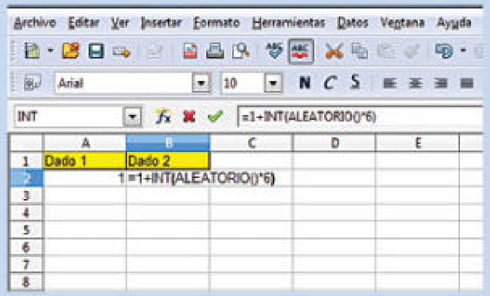


Fig. 2

4. Selecciona la celda A2, da clic en la esquina inferior derecha de ésta y, sin soltar el botón primario del ratón, arrástralo hasta la celda A21. Haz lo mismo con las celdas B2 hasta B21 (figura 3).

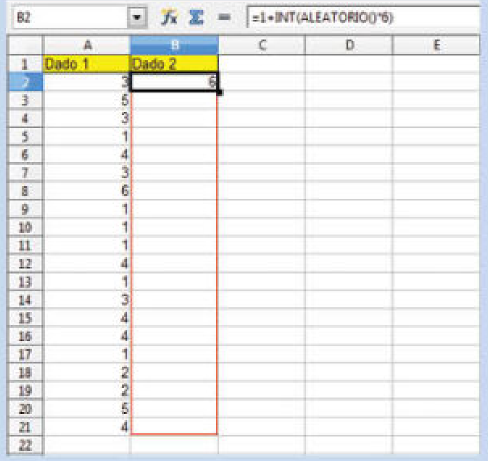


Fig. 3

5. En la celda C1 escribe: *Suma*; en la celda C2 inserta la fórmula $=A2+B2$, y oprime la tecla *Entrar*. Esta fórmula te permite sumar los valores de las celdas *A2* y *B2* (figura 4). Selecciona la celda C2, posiciona el cursor en la esquina inferior derecha y arrastra hasta la celda C21. Así obtendrás la suma de cada par de valores de las celdas correspondientes y simularás los resultados de 20 lanzamientos.

6. En la celda D1 escribe *Favorable* y en la D2 inserta la fórmula *=SI(C2,<=6;1;0)* (figura 5); así conocerás la probabilidad de que el valor de la celda C2 sea menor o igual que 6 para ello en la celda D2 aparecerá un valor de 1. Si no se cumple esta condición, en esta celda aparecerá un valor de cero. Para llenar el resto de las celdas de la columna D, selecciona la celda D2 y arrástrala hasta la D21 como lo hiciste antes.

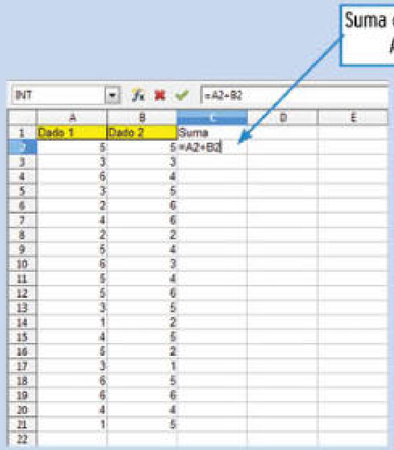


Fig. 4

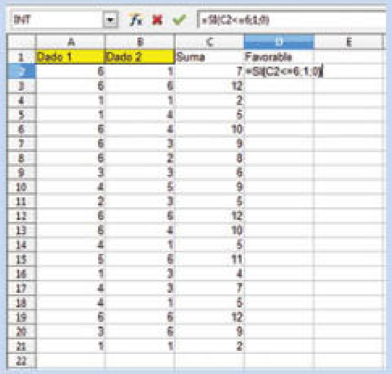
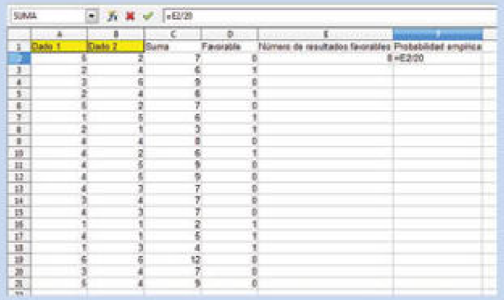


Fig. 5

7. En la celda E1 escribe *Número de resultados favorables* y en la E2, la fórmula *=SUMA(D2:D21)*. Así obtendrás la suma de los resultados favorables para ganar el juego; es decir, los que cumplan con la condición de ser menores o iguales que 6, que estarán representados con el número 1 en las celdas D2 a D21.

8. En la celda F1 escribe *Probabilidad empírica* y en la F2, la fórmula *=E2/20* para calcular el cociente del número de resultados favorables entre el número de lanzamientos, lo que corresponde con la probabilidad empírica (figura 6). Toma nota del valor de la probabilidad empírica y escríbelo en el inciso a) de la tabla 1.



SUMA =E2/20

	A	B	C	D	E	F
1	Dado 1	Dado 2	Suma	Favorable	Número de resultados favorables	Probabilidad empírica
2	5	2	7	0	8	=E2/20
3	2	4	6	1		
4	3	6	9	0		
5	2	4	6	1		
6	5	2	7	0		
7	1	5	6	1		
8	2	1	3	1		
9	4	4	8	0		
10	4	2	6	1		
11	4	5	9	0		
12	4	5	9	0		
13	4	3	7	0		
14	3	4	7	0		
15	4	3	7	0		
16	1	1	2	1		
17	4	1	5	1		
18	1	3	4	1		
19	6	6	12	0		
20	3	4	7	0		
21	5	4	9	0		

Fig. 6

Probabilidad empírica	Valor
a)	
b)	
c)	

Tabla 1

9. Presiona la tecla F9 para simular de nuevo los 20 lanzamientos. Considera que entre más se acerque a 1 la probabilidad empírica, mayor es el número de resultados favorables y, por tanto, mayor la probabilidad de ganar el juego. Anota el valor de la probabilidad empírica en el inciso b) de la tabla anterior.

10. Presiona la tecla F9 y anota el valor de la probabilidad empírica en el inciso c). Compara tus resultados y responde de acuerdo con tus observaciones.

a) ¿Apostarías en "Par de dados a seis"? ______ ¿Por qué? ____________

11. Realiza de nuevo la simulación, pero ahora considera 100 lanzamientos. Obtén al menos tres resultados para la probabilidad empírica y compáralos con los que obtuviste para 20 lanzamientos.

a) ¿Cómo es la probabilidad empírica si consideras 100 lanzamientos con respecto a la que obtuviste para 20 lanzamientos?

____

b) De acuerdo con los resultados que obtuviste para 100 lanzamientos, ¿apostarías "Par de dados a seis"?

____

c) ¿Consideras que el juego es justo? Si piensas que no es justo, ¿qué cambios harías para que sí lo fuera?

____

Ponte a prueba PISA

1. En dos horas se vacía la mitad del agua de una cisterna que inicialmente estaba a su máxima capacidad; en las siguientes cuatro horas se desaloja una tercera parte del agua que quedaba y, al final, en la cisterna quedan 1 600 litros.

a) ¿Cuál es la capacidad total de la cisterna?

- 9600 litros
- 3 840 litros
- 6 400 litros
- 4 800 litros

2. En una fábrica de productos químicos se vierte amoniaco en un depósito de la forma y medidas que muestra la figura 1. Cuando la sustancia cubre la superficie de un círculo con radio de 1.5 m se abre la compuerta inferior y ese líquido se vierte en un contenedor de forma cilíndrica.

Fig. 1

a) ¿Qué cantidad de amoniaco contiene el depósito cónico al momento de abrirse la compuerta?

b) Si el contenedor cilíndrico tiene un radio de 2 m y una altura de 3 m, ¿a qué altura del contenedor llegará el amoniaco que en él se deposita?

c) Después el contenedor cilíndrico se llena con ácido nítrico para combinarlo con el amoniaco. ¿Qué proporción de cada sustancia hay en el producto final?

____

3. Cuatro jarras, cada una de un litro de capacidad, contienen jugo. De éstas, tres están llenas y la cuarta sólo contiene tres cuartas partes de su capacidad. Se necesitan llenar vasos cilíndricos de una altura de 9.5 cm y un radio de 2.8 cm con el jugo de las jarras, pero para que éste no se derrame, en cada vaso se dejan 0.5 cm sin llenar. ¿Cuántos vasos se pueden llenar?

4. Se tienen tres bolsas cada una con cinco canicas de colores numeradas como muestra la figura 2.

Fig. 2

a) Se organiza un juego de azar que consiste en extraer 10 veces una canica y sumar el número que se obtiene en cada una. Después de cada extracción, la canica se regresa a la bolsa. Gana quien sume más puntos. ¿Qué bolsa escogerías para ganar? ¿Por qué?

____

b) ¿Con qué bolsa es más probable sumar menos puntos? ¿Por qué? ______________________________

____

c) ¿Cómo repartirías las canicas en las bolsas de modo que con las tres se tengan las mismas probabilidades de ganar? ______________________________

____

5. En la escuela de Miguel se rifará una computadora entre los 20 alumnos con mejor promedio. A cada uno le toca un número entre 0 y 19. Para la rifa se utilizan dos cajas: en la primera se colocan dos papeles, uno con el número 0 y otro con el 1; en la segunda los papeles tienen los números del 0 al 9. Para saber quién gana, se extrae un papel de la primera caja y uno de la segunda, y así formar el número ganador.

a) Explica si en la rifa los veinte niños tienen la misma probabilidad de ganar.

____

____

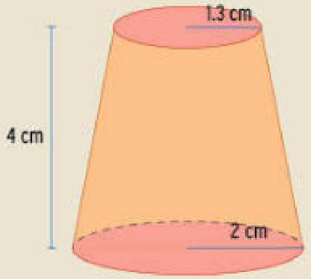
b) Si lo consideras necesario, explica cómo modificarías las condiciones de la rifa para que todos los alumnos tengan igual posibilidad de ganar.

____

____

Ponte a prueba ENLACE

1. Observa el cono truncado de la imagen. Si se completara su parte superior hasta formar el cono completo, ¿cuál sería su altura?



a) 2.6 cm **b)** 11.43 cm **c)** 6.6 cm **d)** 7.43 cm

2. ¿Cómo se debe hacer el corte a un cono para que la sección resultante sea una parábola?

a) Paralelo a la base. **c)** Perpendicular a la base.

b) Oblicuo a la base. **d)** Perpendicular a la base atravesando su diámetro.

3. Karol es siete años mayor que su hermana Dulce, y en seis años la mitad del cuadrado de la edad de Karol será igual al cuadrado de la edad que tendrá Dulce más 31. ¿Qué edad tienen?

a) Karol, 2; Dulce, −5. **c)** Karol, 15; Dulce, 8.

b) Karol, 20; Dulce, 13. **d)** Karol, 14; Dulce, 7.

4. El volumen de un cono recto cuya base tiene un radio de 9 cm es de 1 273.35 cm^3. ¿Cuál es la altura de un cilindro con la misma medida del radio de la base del cono e igual volumen?

a) 45 cm **c)** 5 cm

b) 15 cm **d)** 27 cm

5. Una ruleta con 50 espacios iguales numerados del 1 al 50 se gira para ver el número donde la aguja se detiene. Algunos jugadores eligen las siguientes opciones:
Jugador A: el número obtenido es múltiplo de 10.
Jugador B: el número obtenido es menor que 5.
Jugador C: el número obtenido es primo.
Jugador D: el número obtenido es mayor que 45.
¿Qué eventos son equiprobables?

a) Los eventos A y B. **c)** Los eventos B y C.

b) Los eventos C y D. **d)** Los eventos D y A.

Ahora sé

Autoevaluación

Marca con una ✓ la opción que demuestre tus alcances correspondientes a los aprendizajes esperados y responde la pregunta.

Contenido	¿Logré el aprendizaje? Sí	No	¿Cómo puedo mejorar?
Resuelvo problemas que implican el uso de ecuaciones lineales, cuadráticas o sistemas de ecuaciones. Formulo problemas a partir de una ecuación dada.			
Analizo las secciones que se obtienen al realizar cortes a un cilindro o a un cono recto. Calculo las medidas de los radios de los círculos que se obtienen al hacer cortes paralelos en un cono recto.			
Construyo las fórmulas para calcular el volumen de cilindros y conos, tomando como referencia las fórmulas de prismas y pirámides.			
Estimo y calculo el volumen de cilindros y conos o de cualquiera de las variables implicadas en las fórmulas.			
Analizo situaciones problemáticas asociadas a fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas, en las que existe variación lineal o cuadrática entre dos conjuntos de cantidades.			
Analizo las condiciones necesarias para que un juego de azar sea justo, con base en la noción de resultados equiprobables y no equiprobables.			

Al terminar revisa la tabla con tu profesor. Después, en grupo y con el apoyo de su profesor, elaboren una estrategia de trabajo para que mejoren su desempeño.

Conceptos clave ordenados por ejes y temas

Escribe con tus propias palabras aquellas secciones Integración que consideres convenientes.

Sentido numérico y pensamiento algebraico

Tema	Bloque	En mis propias palabras	Pág.
Patrones y ecuaciones	1		21
	2		72
	3		116

Forma espacio y medida

Tema	Bloque	En mis propias palabras	Pág.
Figuras y cuerpos	1		27
			29
			33
			35
	2		76
			78
			82
			82
			84
	3		120
			125
			132
	4		170
			172

Forma espacio y medida			
Tema	Bloque	En mis propias palabras	Pág.
Medida	2		90
			90
	4		94
			175
			177
			181
			182
			183
			187
			188
			189
	5		221
			222
			227
			230
			235

Manejo de la información			
Tema	Bloque	En mis propias palabras	Pág.
Proporcionalidad y funciones	1		39
			41
			46
			52
			53
	3		140
			143
			147
	4		194
			195
	5		239
			242
Nociones de probabilidad	1		50
	2		99
			101
			102
	3		149
			151
	5		247
Análisis y representación de datos	1		55
			57
	4		198
			199
			202

Bibliografía

Para el alumno

Andradas Heranz, Carlos y Pierdomenico Baccalario, *Póngame un kilo de matemáticas*, México, Ediciones SM, 2004.

Berlanga, Ricardo *et al.*, *Las matemáticas: perejil de todas las salsas*, México, Fondo de Cultura Económica, 1999.

Blum, Wolfgang, *Matemáticas*, México, SEP-Altea, 2005.

Campos Pérez, Mario, *Andrés y el dragón matemático*, México, Laertes, 2005.

Cerasoli, Anna, *La sorpresa de los números: Un viaje al fascinante universo de las matemáticas*, México, SEP-Maeva, 2007 (Colección Libros del Rincón).

Codina Pascual, Roser, Carmen Burgués Flamarich y Manuel Montanuy Fillat, *Apuntes de matemáticas*, México, SEP-Parramón Ediciones, 2007 (Colección Libros del Rincón).

Enzensberger, Hans Magnus, *El diablo de los números: Un libro para todos aquellos que temen a las matemáticas*, Madrid, Ediciones Siruela, 2008.

Garber, Martin, *Acertijos matemáticos*, México, Selector, 2002.

Garber, Martin, *Las últimas recreaciones*, Barcelona, Gedisa, 2002.

Joulette, André, *El secreto de los números*, España, Swing, 2008.

Juster, Norton, *La recta y el punto*, México, SEP-FCE, 2005.

Navarro, César y Mariana Fiordelisio Coll, *De trotamundos y aventureros: Una mirada sobre México*, México, SEP-Santillana, 2005 (Colección Libros del Rincón).

Prieto, Carlos, *Aventuras de un duende en el mundo de las matemáticas*, México, Fondo de Cultura Económica, 2009 (Colección Ciencia para todos).

Ricotti, Stella, *Juegos y problemas para construir ideas matemáticas*, México, Novedades Educativas, 2005.

Ruiz, Concepción y Sergio de Regules, *Crónicas algebraicas*, México, SEP-Santillana, 2002.

Snape, Charles y Heather Scott, *¡Sal si puedes!: Laberintos y rompecabezas matemáticos*, México, SEP-Limusa, 2005 (Colección Libros del Rincón).

Tahan, Malba, *Matemática divertida y curiosa*, México, Océano, 2009.

Talanquer, Vicente, *Fractus, fracta, fractal. Fractales, de laberintos y espejos*, México, Fondo de Cultura Económica, 2009 (Colección Ciencia para todos).

Para el profesor

Airasian, Peter, *La evaluación en el salón de clases*, México, SEP-McGraw-Hill, 2002.

Bosh Giral, Carlos, *El billar no es de vagos: ciencia, juego y diversión*, México, Fondo de Cultura Económica, 2009 (Colección Ciencia para todos).

Bosch Giral, Carlos y Claudia Gómez Wulschner, *Una ventana a la incertidumbre*, México, SEP-Santillana, 2002.

Bosch Giral, Carlos y Claudia Gómez Wulschner, *Una ventana al infinito*, México, SEP-Santillana, 2002.

Bosch Giral, Carlos y Claudia Gómez Wulschner, *Una ventana a las formas*, México, SEP-Santillana, 2002.

Cedillo Ávalos, Tenoch *et al.*, *De los números al álgebra en secundaria mediante el uso de la calculadora*, México, SEP-ILCE, 2002.

Chevallard, Yves, Marianna Bosch y Josep Gascón, *Estudiar matemáticas: El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje*, México, SEP, 2004 (Colección Biblioteca para la Actualización del Maestro).

De la Peña, José Antonio, *Álgebra en todas partes*, México, Fondo de Cultura Económica, 2009 (Colección Ciencia para todos).

De la Peña, José Antonio, *Matemáticas y la vida cotidiana*, México, SEP-Santillana, 2002.

Fonseca Cárdenas, María Teresa, Adriana *et al.*, *PISA en el aula: Matemáticas. Materiales para apoyar la práctica educativa*, México, INNE, 2008.

García Peña, Silvia y Olga Leticia López Escudero, *La enseñanza de la geometría. Materiales para apoyar la práctica educativa*, México, INEE, 2008.

Hernández, Carlos, *La geometría en el deporte*, México, SEP-Santillana, 2003.

Hernández, Carlos, *Matemáticas y deportes*, México, SEP-Santillana, 2002.

Marván, Luz María, *Representación numérica*, México, SEP-Santillana, 2002.

Mochón Cohen, Simón, Teresa Rojano Ceballos y Sonia Ursini Legovich, *Matemáticas con la hoja electrónica de cálculo*, México, SEP-ILCE, 2000.

Ruiz, Concepción y Sergio de Régules, *Crónicas geométricas*, México, SEP-Santillana, 2002.

Ursini, Sonia, *et al.*, *Enseñanza del álgebra elemental: Una propuesta alternativa*, México, Trillas, 2005.

Zubieta Badillo, Gonzalo *et al.*, *Geometría dinámica*, México, SEP, 2000.

Enlaces a sitios web recomendados
Para el alumno

Centro para la Innovación y Desarrollo de la Educación a Distancia (CIDEA), *Matemáticas* 3, www.matematicasonline.es/cidead/3esomatematicas/index.htm (consulta: 21 de enero de 2019).
"Historia de las matemáticas", en *divulgaMAT*, http://vps280516.ovh.net/divulgamat15/index.php?option=com_alphacontent&section=6&Itemid=67 (consulta: 21 de enero de 2019).
"3º Secundaria" en *Matemáticas*, https://es.khanacademy.org/math/eb-3-secundaria (consulta: 21de enero de 2019).
"Matemáticas 3, Secundaria" en *aprende2.0*, https://www.aprende.edu.mx/recursos-educativos-digitales/recursos/index.html?level%5B%5D=3&grade%5B%5D=58&subject%5B%5D=86 (consulta: 21 de enero de 2019).
"Recursos para secundaria" en *Programa Universitario de Enseñanza de las Matemáticas Asistida por Computadora* (s. f.), http://arquimedes.matem.unam.mx/PUEMAC/Secundaria.html (consulta: 21 de enero de 2019).

Para el profesor

Centro para la Innovación y Desarrollo de la Educación a Distancia (CIDEA), *Matemáticas* 3, www.matematicasonline.es/cidead/3esomatematicas/index.htm (consulta: 21 de enero de 2019).
"3º Secundaria" en *Matemáticas*, https://es.khanacademy.org/math/eb-3-secundaria (consulta: 21 de enero de 2019).
"Matemáticas 3, Secundaria" en *aprende2.0*, https://www.aprende.edu.mx/recursos-educativos-digitales/recursos/index.html?level%5B%5D=3&grade%5B%5D=58&subject%5B%5D=86 (consulta: 21 de enero de 2019).

Bibliografía consultada

Alarcón, Jesús *et al.*, *Libro para el maestro. Matemáticas.* Secundaria, México, SEP, 1994.
Carpinteyro, Eduardo y Rubén Sánchez, , *Álgebra*, México, Patria, 2002.
Courant, Richard y Harold Robbins, *¿Qué es la matemática?*, México, Fondo de Cultura Económica, 2005.
Ocampo, Óscar y José Luis Torres, *Física general*, México, Thomson, 2006.
Wentworth, Jorge y David Smith, *Geometría plana y del espacio*, México, Porrúa, 1983.

Créditos iconográficos

© Latinstock México: pp. 26 (1.17), 213; © Thinkstock: pp. 23 (1.8), 72 (2.7), 85 (2.30), 213, 231 (5.35); © Shutterstock: pp. 17, 23 (1.9), 68 (2.2), 71 (2.5), 111, 161, 167 (4.11), 247 (5.52); © Photostock: pp. 167 (4.9), 233 (5.38); © Banco de imágenes Ediciones Castillo, S.A. de C.V.: pp. 100 (2.68), 130 (3.25), 244 (5.49); Ernesto Calderón Cervantes: p. 67; Gerardo González López: pp. 134 (3.32, 3.33, 3.34, 3.35).

p. 21 (1.4): Pesimismo y optimismo (1957), Giacomo Balla, fotografía: ©Bridgeman Art Library, DR. (Giacomo Balla)/SOMAAP/México/2013; **p. 26 (1.17):** Mona Lisa (c. 1503-4), Leonardo Da Vinci, Óleo sobre madera, 77 x 53 cm, Musée du Louvre, Paris, © Latinstock México; **p. 111:** Puente colgante sobre el río Guadalquivir, 1992, Sevilla, fotografía: Francisco Javier Alcerreca Gómez; **p. 211:** Ciudad de las Artes y las Ciencias ca. 2005, fotografía: Massimo Ripani/Grand Tour/Corbis.

Ilustraciones y gráficos:

Fernando David Ortíz Prado: pp. 18 (1.2), 19 (1.3), 30 (1.24), 31 (1.25-1.26), 36 (1.30), 41 (1.34), 44 (1.37), 52 (1.41), 53(1.42), 73 (2.9), 74 (2.11), 80 (2.20), 86 (2.31-2.32), 91 (2.42-2.43), 98 (2.67), 112 (3.1), 114 (3.2-3.3), 130 (3.26), 137 (3.38), 184 (4.40); Eloy Padilla Puga: pp. 92 (2.45), 95 (2.56, 2.57, 2.58), 96 (2.59, 2.60, 2.61, 2.62), 97 (2.63), 119 (3.6), 121 (3.9-3.10), 123 (3.12), 127 (3.18), 145 (3.48), 146 (3.50), 147 (3.51), 148 (3.54-3.55), 162 (4.1-4.2), 163 (4.3), 164 (4.4), 166 (4.6), 166 (4.7), 167 (4.10), 168, 169 (4.14), 170, 172 (4.23), 173 (4.24), 179 (4.31), 183 (4.37), 185 (4.42), 188 (4.45-4.46), 189 (4.47-4.48), 190 (4.49,4.50, 4.51); Carlos Zariñana Pulido: pp. 68 (2.1), 69 (2.3), 70 (2.4), 72 (2.6-2.7), 73 (2.8-2.10), 75 (2.12), 76 (2.13), 77 (2.14), 78 (2.15), 79 (2.16, 2.17, 2.18, 2.19), 80 (2.21-2.22), 81 (2.23), 82 (2.24-2.25), 83 (2.26-2.27), 84 (2.28-2.29), 86 (2.33), 87 (2.34), 88 (2.35, 2.36, 2.37), 89 (2.38, 2.39, 2.40), 90 (2.41), 91 (2.44); Carmen Gutiérrez Cornejo: pp. 18 (1.1), 22 (1.5-1.6), 23 (1.7), 24 (1.10-1.14), 25 (1.15-1.16), 26 (1.18), 27 (1.19), 28 (1.20), 29 (1.21-1.22), 30 (1.23), 32 (1.27-1.28), 33 (1.29), 36 (1.31), 40 (1.32-1.33), 43 (1.35-1.36), 46 (1.38), 47 (1.39), 49 (1.40), 54 (1.43), 56 (1.44), 57 (1.46,1.47,1.48), 63 (1), 64, 92 (2.46, 2.47, 2.48, 2.49), 93 (2.50, 2.51, 2.52, 2.53), 93 (2.50-2.53), 94 (2.54-2.55), 106 (1-2), 107 (3-4), 108, 118 (3.4-3.5), 119 (3.7), 120 (3.8), 122 (3.11), 124 (3.13-3.14), 125 (3.15), 126 (3.16-3.17), 127 (3.19), 128 (3.20-3.21), 129 (3.22, 3.23, 3.24), 131 (3.27), 132 (3.28), 133 (3.29, 3.30, 3.31), 135 (3.36), 136 (3.37), 137 (3.39), 138 (3.40), 139 (3.41), 142 (3.42), 143 (3.43-3.44), 144 (3.45-3.46), 145 (3.47), 147 (3.52-3.53), 150 (3.56), 152 (3.57), 156 (1.2), 157, 158, 165 (4.5), 166 (4.8), 167 (4.12), 169 (4.15), 171 (4.19-4.20), 172 (4.21-4.22), 174 (4.25), 175 (4.26), 176 (4.27), 177 (4.28), 178 (4.29-4.30), 179 (4.32), 180 (4.33), 181 (4.34), 182 (4.35-4.36), 183 (4.38), 184 (4.39), 185 (4.43), 187 (4.44), 191 (4.52-4.53), 193 (4.54), 194 (4.55), 195 (4.56), 196 (4.57), 199 (4.58), 200 (4.59), 201 (4.61), 202 (4.62), 206 (1,2), 207 (3), 208, 237 (5.39), 240 (5.40), 241 (5.41-5.42), 242 (5.43), 243 (5.44-5.47), 245 (5.49), 248 (5.52), 255; Víctor Duarte Alaniz: pp. 212 (5.1), 213 (5.2), 214 (5.3-5.4), 215 (5.5), 216 (5.6), 217 (5.7), 218 (5.8,5.9,5.10), 219, 220, 221 (5.11), 222 (5.12), 223 (5.13-5.14), 224 (5.15, 5.16, 5.17), 225 (5.18-5.19), 226 (5.20, 5.21, 5.22), 227 (5.23-5.24), 228 (5.25, 5.26, 5.27), 229 (5.28, 5.29, 5.30), 230 (5.31-5.32), 231 (5.33), 232 (5.35-5.36), 233 (5.38), 246 (5.50), 248 (5.53), 253 (1), 254 (2).

Esta obra se terminó de imprimir en abril de 2018 en
los talleres de Nombre, calle número. C. P.
Ciudad de México, México.

ISBN 978-607-463-967-4

www.edicionescastillo.com
infocastillo@macmillaneducation.com
Lada sin costo: 01 800 536 1777

macmillan education